Parallélisme et Distribution

Eric Goubault
Commissariat à l'Energie Atomique

Table des matières

Chapitre 1

Avant-Propos

Le but de ce cours est de donner une idée de la programmation, algorithmique et sémantique de systèmes parallèles et distribués. Pour y arriver, on utilise un biais dans un premier temps, qui nous permettra d'aborder les principaux thèmes du domaine. On va utiliser le système de "threads" de JAVA pour simuler des processus parallèles et distribués. Plus tard, on utilisera d'autres fonctionnalités de JAVA, comme les RMI, pour effectuer véritablement des calculs en parallèle sur plusieurs machines.

Les "threads" en tant que tels sont une première approche du parallélisme qui peut même aller jusqu'au "vrai parallélisme" sur une machine multi-processeurs. Pour avoir un panorama un peu plus complet du parallélisme et de la distribution, il faut être capable de faire travailler plusieurs machines (éventuellement très éloignées l'une de l'autre ; penser à internet) en même temps. On en fera une approche, soit par simulation par des threads, soit par le mécanisme de RMI.

Dans les sections 3.2.1 et 3.2.3, on présente d'abord le modèle de threads de JAVA (communication par mémoire partagée) et la façon dont on peut créer et contrôler un minimum les threads utilisateurs. On voit un peu plus en détail à la section 3.2.2 le fonctionnement de la JVM en présence de threads. On donne des éléments plus avancés de contrôle des threads JAVA à la section 3.3, en particulier en ce qui concerne le cycle de vie des threads, les groupes de processus, les priorités, et l'ordonnancement.

Dans le chapitre suivant on s'intéresse au très classique et important problème de l'accès concurrent aux variables partagées. En effet la machine JVM sous-jacente n'est pas une P-RAM CRCW mais ressemble plus à une CREW (voir le chapitre 4 ainsi que [Rob00]). Il faut donc faire très attention à verrouiller les accès, au moins au moment de l'écriture comme on le verra à la section 5.1. Pour ce faire on utilisera essentiellement le mot clé `synchronized` introduit à la section 5.2. On en profitera pour voir un peu de sémantique très minimaliste dans la section 5.4.2. En effet le premier problème que l'on rencontre, et que l'on n'a pas dans le monde séquentiel, est le problème de point mort ou étreinte fatale (deadlock en anglais). On commence à le rencontrer en section 5.4.2 mais ce sera toujours un thème récurrent.

A partir de `synchronized` on peut implémenter les mécanismes de synchronisation et d'exclusion mutuelle typiques que l'on rencontre sous une forme ou une autre dans tout langage parallèle. On commence par les moniteurs [Hoa74], section 5.3, puis les sémaphores binaires [Dij68], section 5.4.1 et les sémaphores plus généraux, dits à compteur, section 5.4.5, qui sont d'ailleurs implémentables à partir des sémaphores binaires [Dij68]. En fait, `synchronized` n'est jamais qu'un sémaphore binaire (ou verrou, ou mutex) associé à une méthode ou à un bout de code. On en profite aussi dans la section 5.5 pour donner une implémentation des barrières de synchronisation, très utilisées dans des programmes parallèles à gros grain, par exemple fonctionnant sur *cluster* de PC.

Quand on ne veut pas mettre des barrières de synchronisation partout, mais que l'on veut ordonnancer ces processus plus mollement (on peut alors gagner en efficacité car l'ordonnancement a plus de degrés de liberté) de façon à ce que l'état global du système reste "cohérent" en un certain sens, on tombe sur les problèmes classique de séquentialisation. On en donne quelques

exemples, très classiques en bases de données distribuées, et on développe le protocole le plus connu permettant d'assurer cette cohérence dans ce cadre, le protocole 2PL ("2-Phase Locking") ou protocole à deux phases, en section 5.6. On se reportera au cours de S. Abiteboul, [Abi00], pour plus de détails et de références.

On voit enfin au chapitre 6 les grands classiques des algorithmes permettant de programmer l'exclusion mutuelle (le `synchronized`) sur des machines à mémoire partagée, sous certaines hypothèses. Cela peut paraître assez académique mais est un excellent moyen de s'habituer à raisonner sur des programmes parallèles se coordonnant par lecture et écriture en mémoire partagée, et cela n'est pas si facile. Cela permet également de se familiariser aux preuves de programmes parallèles.

Il existe des compilateurs qui parallélisent automatiquement des codes séquentiels. On en présente les principes théoriques au chapitre 7. L'optimisation effectuée par ces compilateurs consiste à transformer le code de telle façon à y trouver "plus de parallélisme".

Dans une deuxième partie, on passe du parallélisme à la distribution en partant des architectures des machines distribuées, et des différentes topologies de communication (chapitre 8). On voit au chapitre 9.3 comment programmer effectivement un algorithme distribué sur un réseau de stations.

Au chapitre 10 on passe en revue quelques algorithmes distribués classiques, permettant de faire de l'algèbre linéaire élémentaire. C'est un bon exercice pour comprendre comment être vraiment efficace. Il faut en particulier avoir un recouvrement optimal des calculs et des communications, et équilibrer les charges au mieux. On verra à cette occasion que dans un cadre hétérogène, c'est-à-dire quand les machines utilisées n'ont pas la même puissance de calcul, il est souvent très difficile d'arriver à un équilibrage correct.

Enfin, au chapitre 11, on complique encore un peu le jeu. Il s'agit maintenant d'écrire des algorithmes qui en plus, sont "tolérants aux pannes", c'est-à-dire que même si certains processeurs du système distribué tombent en panne en cours de calcul, les autres doivent pouvoir terminer leur partie de calcul, de façon correcte. On a pris ici le parti de montrer un petit bout de la théorie sous-jacente, plutôt que de parler extensivement des algorithmes encore une fois.

Références Pour des compléments, ou des applications du parallélisme au calcul scientifique, on pourra se reporter à [GNS00]. Ces notes sont encore très préliminaires et on trouvera en particulier dans [RL03] nombre de compléments. On se reportera aussi au complément de D. Rémy [Rem00] pour tout ce qui concerne l'orienté objet. Le livre [Ray97] apportera au lecteur toutes les précisions voulues sur les algorithmes vus au chapitre 6. Le lecteur trouvera enfin des compléments sur l'algorithmique distribuée, tolérante aux pannes en particulier dans le très encyclopédique [Lyn96]. Pour aller plus loin, en particulier en ce qui concerne la sémantique et les modèles du parallélisme, on pourra se reporter aux notes de cours du Master Parisien de Recherche en Informatique :

http ://amanite.ens.fr/MPRI/bin/view/WebSite/C-2-3

Enfin, je remercie Matthieu Martel et Sylvie Putot d'avoir relu ce polycopié. Les erreurs qui restent sont néanmoins les miennes !

Chapitre 2

Introduction

Ce chapitre est bien sûr loin d'être exhaustif. On n'y parle pratiquement pas de micro-parallélisme, c'est-à-dire du parallélisme au niveau des microprocesseurs. En effet la plupart des microprocesseurs modernes sont à eux seuls de véritables machines parallèles. Par exemple il n'est pas rare (Pentium, PowerPC etc.) d'avoir plusieurs unités de calcul arithmétique (dans le cas du Pentium, d'unités de calcul flottant, ou dans le cas des processeurs MIPS, plusieurs additionneurs, multiplieurs etc.) pouvant fonctionner en parallèle. On parle un peu plus loin du calcul en pipeline qui est courant dans ce genre d'architectures.

A l'autre bout du spectre, les projets les plus en vogue à l'heure actuelle, sont les immenses réseaux d'ordinateurs hétérogènes distribués à l'échelle d'internet, qui posent un certain nombre de problèmes théoriques et pratiques. On pourra se reporter aux divers projets de "metacomputing", voir par exemple

`http ://www.metacomputing.org/`

et le projet "GRID", voir par exemple `http ://www.gridforum.org/`. Il existe un projet de grille national (GRID'5000) pour lequel vous pouvez trouver des documents sur le web. Il est coordonné par Franck Cappello au LRI (à l'Université d'Orsay).

2.1 Une classification des machines parallèles

Une machine *parallèle* est essentiellement un ensemble de *processeurs* qui *coopèrent* et *communiquent*.

Historiquement, les premières machines parallèles sont des *réseaux* d'ordinateurs, et des machines *vectorielles* et faiblement parallèles (années 70 - IBM 360-90 vectoriel, IRIS 80 triprocesseurs, CRAY 1 vectoriel...).

On distingue classiquement quatre types principaux de parallélisme (Taxonomie de *Flynn-Tanenbaum*) : *SISD*, *SIMD*, *MISD* et *MIMD*. Cette classification est basée sur les notions de flot de *contrôle* (deux premières lettres, I voulant dire "Instruction") et flot de *données* (deux dernières lettres, D voulant dire "Data").

2.1.1 Machine SISD

Une machine *SISD* (*S*ingle *I*nstruction *S*ingle *D*ata) est ce que l'on appelle d'habitude une machine séquentielle, ou machine de Von Neuman. Une seule instruction est exécutée à un moment donné et une seule donnée (simple, non-structurée) est traitée à un moment donné.

Le code suivant,

```
int A[100];
...
```

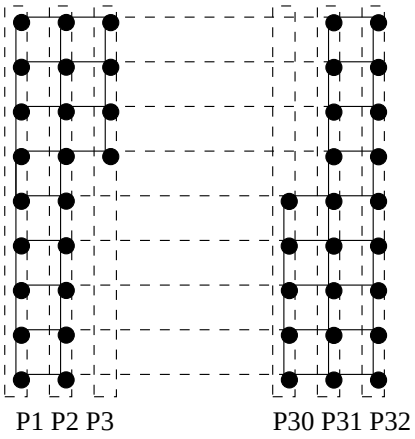


FIG. 2.1 – Répartion d'un tableau sur les processeurs d'une machine SIMD typique.

```
for (i=1;100>i;i++)
   A[i]=A[i]+A[i+1];
```

s'exécute sur une machine séquentielle en faisant les additions `A[1]+A[2]`, `A[2]+ A[3]`, etc., `A[99]+A[100]` à la suite les unes des autres.

2.1.2 Machine SIMD

Une machine *SIMD* (*S*ingle *I*nstruction *M*ultiple *D*ata) est une machine qui exécute à tout instant une seule instruction, mais qui agit en parallèle sur plusieurs données, on parle en général de "parallélisme de données". Les machines SIMD peuvent être de plusieurs types, par exemple, parallèles ou systoliques.

Les machines systoliques sont des machines SIMD particulières dans lesquelles le calcul se déplace sur une topologie de processeurs, comme un front d'onde, et acquiert des données locales différentes à chaque déplacement du front d'onde (comportant plusieurs processeurs, mais pas tous en général comme dans le cas (1)).

En général dans les deux cas, l'exécution en parallèle de la même instruction se fait en même temps sur des processeurs différents (parallélisme de donnée *synchrone*). Examinons par exemple le code suivant (cas (1)) écrit en CM-Fortran sur la Connection Machine-5 avec 32 processeurs,

```
      INTEGER I,J,A(32,1000)
CMF$  LAYOUT A(:NEWS,:SERIAL)
      ...
      FORALL (I=1:32,J=1:1000)
     $    A(I:I,J:J)=A(I:I,J:J)+A(I:I,(J+1):(J+1))
```

Chaque processeur i, $1 \leq i \leq 32$ a dans sa mémoire locale une tranche du tableau `A` : `A(i,1)`, `A(i,2)`, `...`, `A(i,1000)`. Il n'y a pas d'interférence dans le calcul de la boucle entre les différentes tranches : tous les processeurs exécutent la même boucle sur leur propre tranche en même temps (cf. figure 2.1). Ceci grâce à la directive `LAYOUT` qui indique à CM-Fortran que les calculs concernant la deuxième dimension de `A` s'effectueront en séquentiel tandis que ceux concernant la première dimension se feront en parallèle.

2.1.3 Machine MISD

Une machine *MISD* (*M*ultiple *I*nstruction *S*ingle *D*ata) peut exécuter plusieurs instructions en même temps sur la même donnée. Cela peut paraître paradoxal mais cela recouvre en fait un

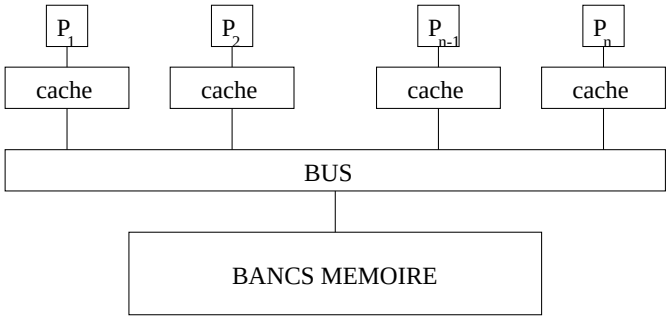


FIG. 2.2 – Architecture simplifiée d'une machine à mémoire partagée.

type très ordinaire de micro-parallélisme dans les micro-processeurs modernes : les processeurs vectoriels et les architectures pipelines.

Un exemple de "pipeline" d'une addition vectorielle est le suivant. Considérons le code :

```
FOR  i:=1 to n DO
   R(a+b*i):=A(a'+b'*i)+B(a''+b''*i);
```

`A`, `B` et `R` sont placés dans des registres vectoriels qui se remplissent au fur et à mesure du calcul,

Temps	A (i)	B (i)	R (i)
1	1 . . .	1 . . .	. . . .
2	2 1 . .	2 1 . .	. . . .
3	3 2 1 .	3 2 1 .	. . . .
4	4 3 2 1	4 3 2 1	. . . .
5	5 4 3 2	5 4 3 2	1 . . .
6	6 5 4 3	6 5 4 3	2 1 . .
etc.			

En ce sens, quand le pipeline est rempli, plusieurs instructions sont exécutées sur la même donnée. Par contre, certaines instructions comme les branchements conditionnels forcent généralement à vider le pipeline, avant d'être exécutées. L'efficacité s'en trouve alors fortement diminuée.

2.1.4 Machine MIMD

Le cas des machines *MIMD* (*M*ultiple *I*nstruction *M*ultiple *D*ata) est le plus intuitif et est celui qui va nous intéresser le plus dans ce cours. Ici, chaque processeur peut exécuter un programme différent sur des données différentes. On a plusieurs types d'architecture possibles :

(1) Mémoire partagée (Sequent etc.)

(2) Mémoire locale + réseau de communication (Transputer, Connection Machine) - Système réparti

C'est le cas (1) que l'on va voir plus particulièrement avec JAVA. On pourra également simuler le cas (2). Pour le cas (2) (en PVM et MPI) et en particulier pour des applications au calcul scientifique, on pourra se reporter par exemple au cours [GNS00].

Parce qu'il n'est en général pas nécessaire d'utiliser des programmes différents pour chaque processeur, on exécute souvent le même code sur tous les noeuds d'une machine MIMD mais ceux-ci ne sont pas forcément synchronisés. On parle alors de modèle SPMD (Single Program Multiple Data).

Mémoire Partagée :

Une machine MIMD à mémoire partagée est principalement constituée de processeurs avec des horloges indépendantes, donc évoluant de façon asynchrone, et communicant en écrivant et lisant des valeurs dans une seule et même mémoire (la mémoire partagée). Une difficulté supplémentaire, que l'on ne décrira pas plus ici, est que chaque processeur a en général au moins un cache de données (voir figure 2.2), tous ces caches devant avoir des informations cohérentes aux moments cruciaux.

La synchronisation des exécutions des processeurs (ou processus, qui en est une "abstraction logique") est nécessaire dans certains cas. Si elle n'était pas faite, il y aurait un risque d'*incohérence* des données. Partant de $x = 0$, exécutons $x := x + x$ en parallèle avec $x := 1$. On a alors essentiellement quatre exécutions possibles (en supposant chacune des affectations compilées en instructions élémentaires insécables, ou "*atomiques*"), comme suit :

`LOAD x,R1`	`WRITE x,1`	`LOAD x,R1`	`LOAD x,R1`
`LOAD x,R2`	`LOAD x,R1`	`WRITE x,1`	`LOAD x,R2`
`WRITE x,1`	`LOAD x,R2`	`LOAD x,R2`	`WRITE x,R1+R2`
`WRITE x,R1+R2`	`WRITE x,R1+R2`	`WRITE x,R1+R2`	`WRITE x,1`
Résultat x=0	Résultat x=2	Résultat x=1	Résultat x=1

Cela n'est évidemment pas très satisfaisant ; il faut rajouter des synchronisations pour choisir tel ou tel comportement. Cela est en particulier traité à la section 5.6.

La synchronisation peut se faire par différents mécanismes :

- Barrières de synchronisation (voir section 5.5),
- Sémaphores : deux opérations P et V (voir section 5.4),
- Verrou (mutex lock) : sémaphore binaire qui sert à protéger une section critique (voir section 5.4.1),
- Moniteurs : construction de haut niveau, verrou implicite (voir section 5.3),
- etc.

Les opérations P et V sur les sémaphores sont parmi les plus classiques et élémentaires (on les verra par la suite en long, en large et en travers, en particulier à la section 5.4). On peut considérer qu'à chaque variable partagée x dans la mémoire est associé un "verrou" (du même nom) indiquant si un processus est en train de la manipuler, et ainsi en interdisant l'accès pendant ce temps. L'opération Px exécutée par un processus verrouille ainsi son accès exclusif à x. L'opération Vx ouvre le verrou et permet à d'autres processus de manipuler x à leur tour.

La encore des erreurs sont possibles, en voulant trop synchroniser par exemple. Il peut y avoir des cas d'*interblocage* (deadlock, livelock) en particulier.

Supposons qu'un processus T_1 ait besoin (pour effectuer un calcul donné) de verrouiller puis déverrouiller deux variables x et y dans l'ordre suivant : Px puis Py puis Vx puis Vy alors qu'un autre processus, en parallèle, désire faire la séquence Py, Px puis Vy et enfin Vx. En fait les deux processus peuvent s'interbloquer l'un l'autre si T_1 acquiert x (respectivement T_2 acquiert y) puis attend y (respectivement x). Tout cela sera encore traité à la section 5.4.2.

Mémoire distribuée

L'emploi d'autres mécanismes de communication que la mémoire partagée pour une machine MIMD est dû à plusieurs choses : par exemple, les processeurs peuvent être physiquement trop éloignés pour qu'un partage de petites quantités d'information soit raisonnable, par exemple, le réseau Internet permet de considérer en un certain sens, tous les ordinateurs reliés comme étant un seul et même ordinateur distribué, où les processeurs travaillent de façon asynchrone et où les informations transitent par passage de message. Un certain nombre de super-calculateurs travaillent par échange de messages également car il n'est techniquement pas possible de connecter un très grand nombre de processeurs directement à une même mémoire.

De façon générale, la synchronisation et l'échange d'information peuvent se faire par,

- Appel de procédure à distance (RPC) :
  - réponse synchrone
  - réponse asynchrone

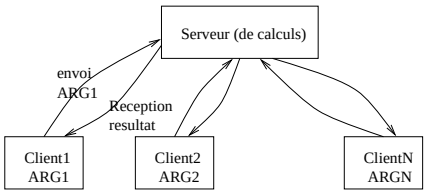


FIG. 2.3 – Architecture Client/Serveur (RPC).

– Envoi/Réception de message asynchrone (tampon de taille limitée ou non), point à point, ou vers des groupes de processus ; par active polling ou gestion à l'arrivée par une procédure `handler`. L'"active polling" ou attente active désigne la façon qu'un processus attendant un message a de demander périodiquement si celui-ci est arrivé, pour effectuer son traitement. C'est une méthode consommatrice de CPU, qui n'est donc pas très efficace. La plupart des primitives de communication asynchrones offrent la possibilité d'appeler directement une fonction utilisateur "handler" à l'arrivée d'un message, ce qui permet au processus demandeur d'effectuer d'autres opérations, avant d'être interrompu par l'appel à ce "handler" de communication.
– Envoi/Réception de message synchrone : rendez-vous. Le modèle synchrone ou bloquant est le plus simple, et nous verrons dans le TD 6 un modèle théorique particulièrement adapté au raisonnement dans ce cas, il s'agit de l'algèbre de processus CCS, sorte de langage jouet décrivant les coordinations possibles de processus.
– Mélange des deux derniers cas.

Le protocole RPC ("Remote Procedure Call") entre machines UNIX avec réseau Ethernet est un exemple de programmation MIMD (cf. figure 2.3). On verra au chapitre 9.3 la programmation correspondante en JAVA (à travers les RMI).

2.1.5 Gain d'efficacité

Les architectures sont plus ou moins bien adaptées à certains problèmes. En fait, le gain de temps espéré, qui est d'au plus N (nombre de processeurs) est rarement atteint et, en pratique, le parallélisme est difficile à contrôler. Enfin, pour revenir à notre première remarque sur la taxonomie de Tanenbaum, il y a de plus en plus rarement une distinction tranchée entre le modèle mémoire partagée et celui par passage de messages ; dans la réalité, la situation est très hybride.

2.2 Contrôle d'une machine parallèle

Il y a deux méthodes principales,
(1) On dispose d'un language séquentiel : le compilateur *parallélise* (Fortran...),

(2) On a une extension d'un langage séquentiel (par exemple, PVM, MPI) ou un langage dédié avec des constructions parallèles *explicites* (Parallel C, Occam...)

On pourra se reporter à [Rob00] et [GNS00] pour les techniques utilisées par les compilateurs dans le cas (1). On en traitera un petit aspect au chapitre 7. On se concentre ici principalement sur le deuxième cas. Il faut alors disposer de primitives (ou instructions) pour :
– La création de parallélisme,
  – Itération simultanée sur tous les processeurs (*FOR* parallèle de Fortran ou *FORALL*),
  – Définition d'un ensemble de *processus* (*COBEGIN*),
  – Création de *processus* (*FORK* de Unix).
– Contrôler les tâches parallèles,
  – Synchronisation (*Rendez-vous* d'Ada),
  – Passage de messages (synchrones/asynchrones, *broadcast*,...),
  – Sections critiques (gestion de la mémoire partagée),

– Arrêt d'une exécution parallèle (*COEND*, *WAIT* d'Unix).

Chapitre 3

Threads Java

3.1 Introduction aux threads

Les “threads” ou “processus légers” sont des unités d'exécution autonomes qui peuvent effectuer des tâches, en parallèle avec d'autres threads : ils sont constitués d'un identificateur, d'un compteur de programme, d'une pile et d'un ensemble de variables locales. Le flot de contrôle d'un thread est donc purement séquentiel. Plusieurs threads peuvent être associés à un “processus lourd” (qui possède donc un flot de contrôle multiple, ou parallèle). Tous les threads associés à un processus lourd ont en commun un certain nombre de ressources, telles que : une partie du code à exécuter, une partie des données, des fichiers ouverts et des signaux.

En Java, le processus lourd sera la JVM (Java Virtual Machine) qui interprète le bytecode des différents processus légers. Les threads coopèrent entre eux en échangeant des valeurs par la mémoire commune (du processus lourd). On en verra à la section 5.1 la sémantique détaillée.

L'intérêt d'un système “multi-threadé”, même sur une machine monoprocesseur, est que l'ordinateur donne l'impression d'effectuer plusieurs tâches en parallèle. Les systèmes d'exploitation modernes (Linux, Windows XP, MacOS X etc.) sont tous multi-threadés contrairement aux premiers OS de micro-ordinateurs. Le fait de pouvoir ouvrir en même temps `netscape`, `emacs`, et un shell par exemple, et de pouvoir passer d'une fenêtre à l'autre sans attente est la marque d'un tel système. L'application `netscape` même est multi-threadée. Une tâche essaie de se connecter au site choisi, pendant qu'une autre imprime à l'écran etc. Imaginez ce que ce serait si vous ne voyiez rien à l'écran tant que le site auquel vous vous connectez n'a pas fini de vous transmettre toutes les données ! En fait, un système d'exploitation comme Unix comporte des processus (lourds) multiples, tels les démons systèmes (ou processus noyau) et souvent un grand nombre de processus (lourds) utilisateurs. Il n'est pas rare d'avoir quelques dizaines voire une centaine de processus lourds sur une machine à tout instant (faire `ps -al` par exemple).

Sur une machine multiprocesseur, des threads peuvent être exécutés sur plusieurs processeurs donc réellement en même temps, quand le système d'exploitation et le support pour les threads sont étudiés pour (c'est le cas pour Windows NT, Solaris 2, Linux etc.). Pour rentrer un peu plus dans les détails, les threads que nous programmerons sont des “threads utilisateurs” qui doivent communiquer avec le noyau de système d'exploitation de temps en temps, ne serait-ce que pour imprimer à l'écran, lire et écrire des fichiers etc. Tout thread utilisateur doit donc être lié d'une façon ou d'une autre à un thread “noyau”. Selon les implémentations, chaque tâche utilisateur peut être liée à une tâche noyau, ou plusieurs tâches utilisateur à plusieurs tâches noyaux, ou encore plusieurs tâches utilisateur à une tâche noyau. La première version de Solaris (“green threads”) implémentait seulement la dernière possibilité qui est la seule qui ne permet pas de bénéficier de vrai parallélisme sur une architecture multiprocesseur. A partir de Java 1.1 et pour les versions plus récentes de Solaris et de Linux, on est dans le deuxième cas, qui offre le plus de flexibilité et de performances.

```
class Compte extends Thread {
   int valeur;

   Compte(int val) {
      valeur = val;
   }

   public void run() {
      try {
         for (;;) {
            System.out.print(valeur + " ");
            sleep(100);
         }
      } catch (InterruptedException e) {
           return;
        }
   }

   public static void main(String[] args) {
      new Compte(1).start();
      new Compte(2000).start();
   }
}
```

FIG. 3.1 – Classe `Compte` programmée par extension de la classe `Thread`.

3.2 Les threads en JAVA

Les threads (ou processus légers) sont définis dans le langage JAVA, et ne sont pas comme en C ou C++, une extension que l'on peut trouver dans différentes bibliothèques.

3.2.1 Création

Pour créer un thread, on crée une instance de la classe `Thread`,
`Thread Proc = new Thread();`
Une fois créé, on peut configurer `Proc`, par exemple lui associer une priorité (on en parlera plus à la section 3.3.1). On pourra ensuite l'exécuter en invoquant sa méthode `start`. Cette méthode va à son tour invoquer la méthode `run` du thread. Comme la méthode `run` de la classe `Thread` ne fait rien, il faut la surcharger. C'est possible par exemple si on définit `Proc` comme une instance d'une sous-classe de `Thread`, dans laquelle on redéfinit la méthode `run`.

En général on a envie qu'un processus contienne des données locales, donc il est vraiment naturel de définir un processus comme une instance d'une sous-classe de `Thread` en général, voir par exemple la figure 3.1

La classe `Compte` gère uniquement ici un entier représentant une somme d'un compte courant d'une banque. Après avoir défini le constructeur, on a écrit une méthode `run` qui sera exécutée deux fois par deux instances différentes de la classe à partir du `main`, l'une avec une valeur de compte initiale égale à `1` et l'autre, à `2000`. La méthode `run` se contente d'afficher la valeur courante du compte tous les dixièmes de seconde, jusqu'à une interruption clavier.

L'exécution du programme `main` donne quelque chose comme,

```
> java Compte
1 2000 1 2000 1 1 2000 1
^C
```

```
class Compte implements Runnable {
   int valeur;

   Compte(int val) {
      valeur = val;
   }

   public void run() {
      try {
         for (;;) {
            System.out.print(valeur + " ");
            sleep(100);
         }
      } catch (InterruptedException e) {
           return;
        }
   }

   public static void main(String[] args) {
      Runnable compte1 = new Compte(1);
      Runnable compte2 = new Compte(2000);
      new Thread(compte1).start();
      new Thread(compte2).start();
   }
}
```

FIG. 3.2 – Classe `Compte` programmée par implémentation de l'interface `Runnable`.

>

Néanmoins, cette méthode de création de thread n'est pas toujours acceptable. En effet dans certains cas, on veut étendre une classe existante et en faire une sous-classe de `Thread` également, pour pouvoir exécuter ses instances en parallèle. Le problème est qu'il n'y a pas d'héritage multiple en JAVA (c'est d'ailleurs plutôt un bien, car c'est en général très difficile à contrôler, voir C++). Donc on ne peut pas utiliser la méthode précédente. A ce moment là on utilise l'interface `Runnable`.

L'interface `Runnable` représente du code exécutable, et ne possède qu'une méthode,

```
public void run();
```

Par exemple la classe `Thread` implémente l'interface `Runnable`. Mieux encore, on peut construire une instance de `Thread` à partir d'un objet qui implémente l'interface `Runnable` par le constructeur :

```
public Thread(Runnable target);
```

On peut écrire à nouveau la classe `Compte` comme à la figure 3.2. La seule différence visible est à la création des threads `Compte`. Il faut en effet utiliser le constructeur décrit plus haut avant d'appeler la méthode `start`. Une dernière remarque pour ce bref rappel sur la création des threads. Il ne faut surtout pas appeler directement la méthode `run` pour lancer un processus : le comportement du programme serait tout à fait incompréhensible.

3.2.2 Partage des variables

Sur l'exemple de la section précédente il faut noter plusieurs choses. Les entiers `valeur` sont distincts dans les deux threads qui s'exécutent. C'est une variable locale au thread. Si on avait

```
public class UnEntier {
    int val;

    public UnEntier(int x) {
        val = x;
    }

    public int intValue() {
        return val;
    }

    public void setValue(int x) {
        val = x;
    }
}
```

FIG. 3.3 – La classe `UnEntier`.

déclaré `static int valeur`, cette variable aurait été partagée par ces deux threads. En fait, il aurait été même préférable de déclarer `static volatile int valeur` afin de ne pas avoir des optimisations gênantes de la part de `javac`... Si on avait déclaré `Integer valeur` ("classe enveloppante" de `int`) ou `UnEntier valeur`, comme à la figure 3.3, cette classe, utilisée en lieu et place de `int` aurait pu être partagée par tous les threads, car une instance de classe, comme dans ce cas, n'est qu'un pointeur vers la mémoire partagée.

3.2.3 Quelques fonctions élémentaires sur les threads

Pour s'amuser (disons que c'est au moins utile pour débugger) on peut nommer les threads : `void setName(String name)` nomme le thread courant. `String getName()` renvoie le nom du thread.

Un peu plus utile maintenant : on peut recueillir un certain nombre d'informations sur les threads présents à l'exécution. Par exemple, `static Thread currentThread()` renvoie la référence au thread courant c'est-à-dire celui qui exécute `currentThread()`. La méthode

`int enumerate(Thread[] threadArray)`

place tous les threads existants (y compris le `main()` mais pas le thread ramasse-miettes) dans le tableau `threadArray` et renvoie leur nombre. `static int activeCount()` renvoie le nombre de threads actifs (on définira mieux ce que cela peut être aux sections suivantes).

Voici un petit exemple d'utilisation (que l'on pourra également trouver, comme tous les autres exemples de ce cours, sur la page web du cours

http ://www.enseignement.polytechnique.fr/profs/informatique/Eric.Goubault/ParaI05.html), à la figure 3.4.

Son exécution donne :

```
% java Compte3
1 2000 Le thread 0 est main
Le thread 1 est Thread-2
Le thread 2 est Thread-3
1 2000 1 2000 1 2000 1 2000 2000
1 1 2000 2000 1 1 2000 2000 1 1
2000 2000 1 1 2000 2000 1 1 2000
2000 1 1 2000 2000 1 1 ^C
%
```

```
class Compte3 extends Thread {
   int valeur;

   Compte3(int val) {
      valeur = val;
   }

   public void run() {
      try {
         for (;;) {
            System.out.print(valeur + " ");
            sleep(100);
         }
      } catch (InterruptedException e) {
           return; } }

   public static void printThreads() {
      Thread[] ta = new Thread[Thread.activeCount()];
      int n = Thread.enumerate(ta);
      for (int i=0; i<n; i++) {
         System.out.println("Le thread "+ i + " est
                              " + ta[i].getName());
      } }

   public static void main(String[] args) {
      new Compte3(1).start();
      new Compte3(2000).start();
      printThreads(); } }
```

FIG. 3.4 – Nouvelle implémentation de la classe `Compte`.

```
public class ... extends Thread {
   ...
   public void stop() {
      t.shouldRun=false;
      try {
         t.join();
      } catch (InterruptedException e) {}   } }
```

FIG. 3.5 – Utilisation typique de `join`.

3.3 Eléments avancés

Pour commencer cette section, il faut d'abord expliquer quels peuvent être les différents états des threads JAVA. Un thread peut être dans l'un des 4 cas suivants :

- l'état initial, comprenant tous les instants entre sa création (par un constructeur) et l'invocation de sa méthode `start()`.
- l'état prêt, immédiatement après que la méthode `start` ait été appelée.
- l'état bloqué représentant les instants où le thread est en attente, par exemple d'un verrou, d'un socket, et également quand il est suspendu (par la méthode `sleep(long)` qui suspend l'exécution du thread pendant un certain temps exprimé en nanosecondes, ou `suspend`). On repasse à l'état prêt (ou exécution) quand le verrou est de nouveau disponible, ou quand a été fait `resume`, `notify` etc.
- l'état terminaison, quand sa méthode `run()` se termine ou quand on invoque la méthode `stop()` (à éviter si possible, d'ailleurs cette méthode n'existe plus en JAVA 2).

On peut déterminer l'état d'un thread en appelant sa méthode `isAlive()`, qui renvoie un booléen indiquant si un thread est encore vivant, c'est-à-dire s'il est prêt ou bloqué.

On peut aussi interrompre l'exécution d'un thread qui est prêt (passant ainsi dans l'état bloqué). `void interrupt()` envoie une interruption au thread spécifié ; si l'interruption se produit dans une méthode `sleep`, `wait` ou `join` (que l'on va voir plus tard), elles lèvent une exception `InterruptedException`[1] ; sinon le thread cible doit utiliser une des méthodes suivantes pour savoir si il a été interrompu : `static boolean interrupted()` renvoie un booléen disant si le thread courant a été "interrompu" par un autre ou pas et l'interrompt, `boolean isInterrupted()` renvoie un booléen disant si le thread spécifié a été interrompu ou pas (sans rien faire d'autre).

La méthode `void join()` (comme sous Unix) attend la terminaison d'un thread. Egalement : `join(long timeout)` attend au maximum `timeout` millisecondes. Voir par exemple la figure 3.5 : la méthode `stop` ainsi définie bloque jusqu'à ce que le processus identifié par `t` ait terminé son exécution. C'est une méthode de synchronisation particulièrement utile dans la pratique, et que l'on verra souvent en TD.

3.3.1 Priorités

On peut affecter à chaque processus une priorité, qui est un nombre entier. Plus ce nombre est grand, plus le processus est prioritaire. `void setPriority(int priority)` assigne une priorité au thread donné et `int getPriority()` renvoie la priorité d'un thread donné.

L'idée est que plus un processus est prioritaire, plus l'ordonnanceur JAVA doit lui permettre de s'exécuter tôt et vite. La priorité peut être maximale : `Thread.MAX_PRIORITY` (en général 10), normale (par défaut) : `Thread.NORM_PRIORITY` (en général 5), ou minimale `Thread.MIN_PRIORITY` (elle vaut en général 0). Pour bien comprendre cela, il nous faut décrire un peu en détail la façon dont sont ordonnancés les threads JAVA. C'est l'objet de la section suivante.

On peut également déclarer un processus comme étant un démon ou pas :

[1] C'est pourquoi il faut toujours encapsuler ces appels dans un bloc `try ... catch(InterruptedException e)`

```
setDaemon(Boolean on);
boolean isDaemon();
```

La méthode `setDaemon` doit être appelée sur un processus avant qu'il soit lancé (par `start`). Un processus démon est typiquement un processus "support" aux autres. Il a la propriété d'être détruit quand il n'y a plus aucun processus utilisateur (non-démon) restant (en fait il y a un certain nombre de threads systèmes par JVM : ramasse-miettes, horloge, etc.). En fait, il est même détruit dès que le processus l'ayant créé est détruit ou termine.

3.3.2 Ordonnancement des tâches JAVA

Le choix du thread JAVA à exécuter (au moins partiellement) se fait parmi les threads qui sont prêts. Supposons que nous soyons dans le cas monoprocesseur. Il y aura donc à tout moment un seul thread actif à choisir. L'ordonnanceur JAVA est un ordonnanceur préemptif basé sur la priorité des processus. Essayons d'expliquer ce que cela veut dire. "Basé sur la priorité" veut dire qu'à tout moment, l'ordonnanceur essaie de rendre actif le (si on se place d'abord dans le cas simple où il n'y a pas deux threads de même priorité) thread prêt de plus haute priorité. "Préemptif" veut dire que l'ordonnanceur use de son droit de préemption pour interrompre le thread courant de priorité moindre, qui reste néanmoins prêt. Il va de soit qu'un thread actif qui devient bloqué, ou qui termine rend la main à un autre thread, actif, même s'il est de priorité moindre.

Attention tout de même, un système de priorité n'est en aucun cas une garantie : c'est pourquoi on insiste sur le "essaie" dans la phrase "l'ordonnanceur essaie de rendre actif le thread prêt de plus haute priorité". On verra au chapitre 6 des algorithmes permettant d'implémenter l'exclusion mutuelle à partir de quelques hypothèses de base, elles ne font aucunement appel aux priorités. Un système de priorités ne peut en effet garantir des propriétés strictes comme l'exclusion mutuelle.

Il y a maintenant plusieurs façons d'ordonnancer des threads de même priorité. La spécification de la JVM ne définit pas cela précisément.

Il y a par exemple la méthode d'ordonnancement "round-robin" (ou "tourniquet") dans lequel un compteur interne fait alterner l'un après l'autre (pendant des périodes de temps prédéfinies) les processus prêts de même priorité. Cela assure l'*équité* dans l'exécution de tous les processus, c'est-à-dire que tous vont progresser de conserve, et qu'aucun ne sera en état de *famine* (les processus "plus rapides" étant toujours ordonnancés, ne laissant pas la possibilité aux autres d'être ordonnancés).

Un ordonnancement plus classique (mais pas équitable en général) est celui où un thread d'une certaine priorité, actif, ne peut pas être préempté par un thread prêt de même priorité. Il faut que celui-ci passe en mode bloqué pour qu'un autre puisse prendre la main. Cela peut se faire en interrompant régulièrement les processus par des `sleep()` mais ce n'est pas très efficace. Il vaut mieux utiliser `static void yield()` : le thread courant rend la main, ce qui permet à la machine virtuelle JAVA de rendre actif un autre thread de même priorité.

Tout n'est pas complètement aussi simple que cela. L'ordonnancement dépend en fait aussi bien de l'implémentation de la JVM que du système d'exploitation sous-jacent. Il y a deux modèles principaux concernant la JVM. Dans le modèle "green thread", c'est la JVM qui implémente l'ordonnancement des threads qui lui sont associés. Dans le modèle "threads natifs", c'est le système d'exploitation hôte de la JVM qui effectue l'ordonnancement des threads JAVA.

Le modèle "green thread" est le plus souvent utilisé dans les systèmes UNIX donc même sur une machine multi-processeurs, un seul thread JAVA sera exécuté à la fois sur un tel système.

Par contre sur les plateformes Windows (Windows 95 ou Windows NT), les threads sont des threads natifs, et les threads JAVA correspondent bijectivement à des threads noyaux.

Sous Solaris, la situation est plus complexe, car il y a un niveau intermédiaire de processus connu du système d'exploitation (les "light-weight processes"). On n'entrera pas ici dans les détails.

Pour ceux qui sont férus de système, disons que l'on peut contrôler pas mal de choses de ce côté là grâce à la Java Native Interface, voir par exemple

`http ://java.sun.com/docs/books/tutorial/native1.1/`

3.3.3 Les groupes de processus

JAVA permet de définir des groupes de processus. Il existe une classe `class ThreadGroup` qui représente précisément ces groupes de processus. On peut définir un nouveau Thread dans un groupe donné par les constructeurs,

```
new Thread(ThreadGroup group, Runnable target);
new Thread(ThreadGroup group, String name);
new Thread(ThreadGroup group, Runnable target, String name);
```

Par défaut, un thread est créé dans le groupe courant (c'est-à-dire de celui qui l'a créé). Au démarrage, un thread est créé dans le groupe de nom `main`. On peut créer de nouveaux groupes et créer des threads appartenant à ces groupes par de nouveaux constructeurs. Par exemple,

```
ThreadGroup Groupe = new ThreadGroup("Mon groupe");
Thread Processus = new Thread(Groupe, "Un processus");
...
ThreadGroup MonGroupe = Processus.getThreadGroup();
```

On peut également faire des sous-groupes (en fait n'importe quelle arborescence est autorisée). On peut alors demander un certain nombre d'informations :

```
Groupe.getParent();
Groupe.getName();
Groupe.activeCount();
Groupe.activeGroupCount();
Groupe.enumerate(Thread[] list);
Groupe.enumerate(Thread[] list, boolean recurse);
Groupe.enumerate(ThreadGroup[] list);
Groupe.enumerate(ThreadGroup[] list, boolean recurse);
```

La première instruction permet de connaître le groupe parent, la deuxième le nom du groupe (une `String`), la troisième le nombre de threads du groupe `Groupe`, la quatrième le nombre de groupes de threads, et les quatre suivantes, d'énumérer soit les threads d'un groupe, soit les groupes (cela remplit le tableau correspondant à chaque fois). Le booléen `recurse` indique si on désire avoir la liste récursivement, pour chaque sous-groupe etc.

Chapitre 4

Modèle PRAM

4.1 Introduction

Dans ce premier chapitre sur la modélisation "théorique" de la calculabilité et de la complexité sur une machine parallèle, on fait un certain nombre d'hypothèses simplificatrices, voire très peu réalistes.

Tout comme la complexité des algorithmes séquentiels suppose que ceux-ci sont exécutés sur une machine conforme au modèle de Von Neumann, aussi appelée RAM pour Random Access Machine, nous avons besoin de définir un modèle de machine parallèle "théorique", pour pouvoir analyser le comportement asymptotique d'algorithmes utilisant plusieurs unités de calcul à la fois.

Le modèle le plus répandu est la PRAM (Parallel Random Access Machine), qui est composée :

- d'une suite d'instructions à exécuter plus un pointeur sur l'instruction courante,
- d'une suite non bornée de processeurs parallèles,
- d'une mémoire partagée par l'ensemble des processeurs.

La PRAM ne possédant qu'une seule mémoire et qu'un seul pointeur de programme, tous les processeurs exécutent la même opération au même moment.

Supposons que nous voulions modéliser ce qui se passe sur une machine parallèle dont les processeurs peuvent communiquer entre eux à travers une mémoire partagée. On va tout d'abord supposer que l'on a accès à un nombre éventuellement infini de processeurs. Maintenant, comment modéliser le coût d'accès à une case mémoire ? Quel est le coût d'un accès simultané de plusieurs processeurs à la mémoire partagée ? L'hypothèse que l'on va faire est que le coût d'accès de n'importe quel nombre de processeurs à n'importe quel sous-ensemble de la mémoire, est d'une unité. On va aussi se permettre de faire trois types d'hypothèses sur les accès simultanés à une même case mémoire :

- EREW (Exclusive Read Exclusive Write) : seul un processeur peut lire et écrire à un moment donné sur une case donnée de la mémoire partagée.
- CREW (Concurrent Read Exclusive Write) : plusieurs processeurs peuvent lire en même temps une même case, par contre, un seul à la fois peut y écrire. C'est un modèle proche des machines réelles (et de ce que l'on a vu à propos des threads JAVA).
- CRCW (Concurrent Read Concurrent Write) : c'est un modèle étonnament puissant et assez peu réaliste, mais qu'il est intéressant de considérer d'un point de vue théorique. Plusieurs processeurs peuvent lire ou écrire en même temps sur la même case de la mémoire partagée. Il nous reste à définir ce qui se passe lorsque plusieurs processeurs écrivent au même moment ; on fait généralement l'une des trois hypothèses suivantes :
  - mode consistant : tous les processeurs qui écrivent en même temps sur la même case écrivent la même valeur.
  - mode arbitraire : c'est la valeur du dernier processeur qui écrit qui est prise en compte.
  - mode fusion : une fonction associative (définie au niveau de la mémoire), est appliquée à toutes les écritures simultanées sur une case donnée. Ce peut être par exemple, une

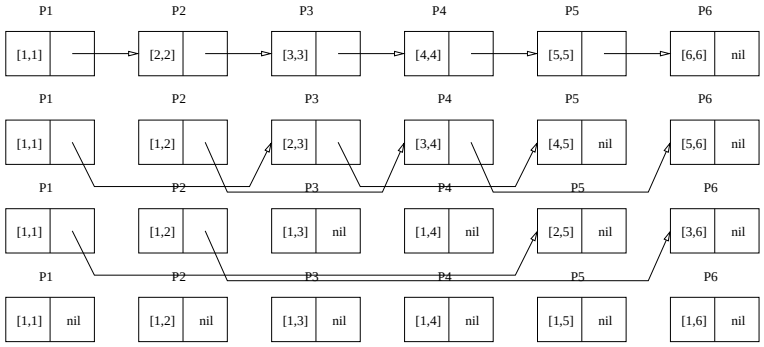


FIG. 4.1 – Technique du saut de pointeur.

fonction maximum, un ou bit à bit etc.

Les algorithmes que nous allons développer dans les sections suivantes seront déclarés être des algorithmes EREW, CREW ou CRCW si nous pouvons les écrire de telle façon qu'ils respectent les hypothèses de ces différents modes de fonctionnement.

4.2 Technique de saut de pointeur

Ceci est *la première* technique importante sur les machines PRAM. On l'illustre dans le cas assez général où l'on souhaite calculer le résultat d'une opération binaire associative $\otimes$ sur un n-uplet. Soit donc $(x_1, \ldots, x_n)$ une suite (en général de nombres). Il s'agit de calculer la suite $(y_1, \ldots, y_n)$ définie par $y_1 = x_1$ et, pour $1 \leq k \leq n$, par

$$y_k = y_{k-1} \otimes x_k$$

Pour résoudre ce problème on choisit une PRAM avec n processeurs. Remarquez ici que le nombre de processeurs dépend du nombre de données ! L'opérateur binaire associatif que l'on utilise sera représenté par `op`. Chaque valeur x_i et y_i est représentée par une variable partagée `x[i]` et `y[i]`, qui va être gérée par le processeur P_i. On représente le n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ par une liste chaînée, avec la case pointée par `next[i]` qui contient `x[i+1]` pour $i < n$ et `next[n]=nil`. On obtient alors l'algorithme suivant :

```
for each processor i in parallel {
  y[i] = x[i];
}
while (exists object i s.t. next[i] not nil) {
  for each processor i in parallel {
    if (next[i] not nil) {
      y[next[i]] =_next[i] op_next[i](y[i],y[next[i]]);
      next[i] =_i next[next[i]];
    }
  }
}
```

On a pris les notations (que l'on utilisera rarement, car elles sont lourdes) :

– `op_j` pour préciser que l'opération `op` s'effectue sur le processeur `j`.

– `=_j` pour préciser que l'affectation est faite par le processeur `j`.

Notons $[i, j] = x_i \otimes x_{i+1} \otimes \ldots \otimes x_j$ pour $i < j$. Les quatre étapes nécessaires au calcul, pour $n = 6$ sont représentées à la figure 4.1. On note qu'à la fin, tous les `next[i]` valent nil.

Le principe de l'algorithme est simple : à chaque étape de la boucle, les listes courantes sont dédoublées en des listes des objets en position paire, et des objets en position impaire. C'est le même principe que le "diviser pour régner" classique en algorithmique séquentielle.

Remarquez que si on avait écrit

```
y[i] =_i op_i(y[i],y[next[i]]);
```

à la place de

```
y[next[i]] =_next[i] op_next[i](y[i],y[next[i]]);
```

on aurait obtenu l'ensemble des préfixes dans l'ordre inverse, c'est-à-dire que P_1 aurait contenu le produit $[1,6]$, P_2 $[1,5]$, jusqu'à P_6 qui aurait calculé $[6,6]$.

Il y a tout de même une petite difficulté : nous avons parlé d'étapes, et il est vrai que la seule exécution qui nous intéresse, et qui est correcte, est celle où chacun des processeurs est d'une certaine façon synchronisé : chacun en est au même déroulement de boucle à tout moment. C'est la sémantique du `for` parallèle que nous choisirons pour la suite. De plus une boucle parallèle du style :

```
for each processor i in parallel
  A[i] = B[i];
```

a en fait exactement la même sémantique que le code suivant :

```
for each processor i in parallel
  temp[i] = B[i];
for each processor i in parallel
  A[i] = temp[i];
```

dans lequel on commence par effectuer les lectures en parallèle, puis, dans un deuxième temps, les écritures parallèles.

Il y a clairement $\lfloor log(n) \rfloor$ itérations dans l'algorithme du saut de pointeur, pour le calcul du produit d'une suite de nombre, et on obtient facilement un algorithme CREW en temps logarithmique. Il se trouve que l'on obtient la même complexité dans le cas EREW, cela en transformant simplement les affectations dans la boucle, en passant par un tableau temporaire :

```
d[i] = d[i]+d[next[i]];
```

devient :

```
temp[i] = d[next[i]];
d[i] = d[i]+temp[i];
```

Supposons que l'opération associative dans notre cas soit la somme. Voici un exemple d'implémentation de cette technique de saut de pointeurs avec des threads JAVA. On dispose d'un tableau `t` contenant n éléments de type `int`. Ici on s'est contenté de donner le code pour le cas $n = 8$. On souhaite écrire un programme calculant les sommes partielles des éléments de `t`. Pour cela, on crée n threads, le thread p étant chargé de calculer $\sum_{i=0}^{i=p-1} \texttt{t[i]}$.

```
public class SommePartielle extends Thread {

    int pos,i;
    int t[][];

    SommePartielle(int position,int tab[][]) {
      pos = position;
      t=tab;
    }
```

```
    public void run() {
      int i,j;

      for (i=1;i<=3;i++) {
        j = pos-Math.pow(2,i-1);
        if (j>=0) {
          while (t[j][i-1]==0) {} ; // attendre que le resultat soit pret
          t[pos][i] = t[pos][i-1]+t[j][i-1] ;
          } else {
        t[pos][i] = t[pos][i-1] ;
      };
    };
  }
}
```

L'idée est que le résultat de chacune des $3{=}log_2(n)$ étapes, disons l'étape i, du saut de pointeur se trouve en $t[proc][i]$ ($proc$ étant le numéro du processeur concerné, entre 0 et 8). Au départ, on initialise (par l'appel au constructeur `SommePartielle`) les valeurs que voient chaque processeur : $t[proc][0]$. Le code ci-dessous initialise le tableau d'origine de façon aléatoire, puis appelle le calcul parallèle de la réduction par saut de pointeur :

```
import java.util.* ;

public class Exo3 {

    public static void main(String[] args) {
        int[][] tableau = new int[8][4];
        int i,j;
        Random r = new Random();

        for (i=0;i<8;i++) {
            tableau[i][0] =  r.nextInt(8)+1 ;
            for (j=1;j<4;j++) {
                tableau[i][j]=0;
            };
        };

        for (i=0;i<8;i++) {
            new SommePartielle(i,tableau).start() ;
        };

        for (i=0;i<8;i++) {
           while (tableau[i][3]==0) {} ;
        };

        for (i=0;i<4;i++) {
            System.out.print("\n");
            for (j=0;j<8;j++) {
                System.out.print(tableau[j][i]+" ");
            };
        };
        System.out.print("\n");
    }
}
```

4.3 Circuit Eulerien

On souhaite calculer à l'aide d'une machine PRAM EREW la profondeur de tous les nœuds d'un arbre binaire. C'est l'extension naturelle du problème de la section précédente, pour la fonction "profondeur", sur une structure de données plus complexe que les listes.

On suppose qu'un arbre binaire est représenté par un type abstrait `arbre_binaire` contenant les champs suivants :

- `int numero` : numéro unique associé à chaque nœud,
- `int profondeur` : valeur à calculer,
- `arbre_binaire pere` : père du nœud courant de l'arbre,
- `arbre_binaire fg,fd` : fils gauche et droit du nœud courant dans l'arbre.

Un algorithme séquentiel effectuerait un parcours en largeur d'abord, et la complexité dans le pire cas serait de $O(n)$ où n est le nombre de noeuds de l'arbre.

Une première façon de paralléliser cet algorithme consiste à propager une "vague" de la racine de l'arbre vers ses feuilles. Cette vague atteint tous les nœuds de même profondeur au même moment et leur affecte la valeur d'un compteur correspondant à la profondeur actuelle.

Un pseudo-code serait (où le `forall` indique une boucle `for` effectuée en parallèle) :

```
actif[0] = true;
continue = true;
p = 0; /* p est la profondeur courante */

forall j in [1,n-1]
  actif[j] = false;

while (continue == true)
  forall j in [0,n-1] such that (actif[j] == true) {
    continue = false;
    prof[j] = p;
    actif[j] = false;
    if (fg[j] != nil) {
      actif[fg[j]] = true;
      continue = true;
      p++; }
    if (fd[j] != nil) {
      actif[fd[j]] = true;
      continue = true;
      p++; }
```

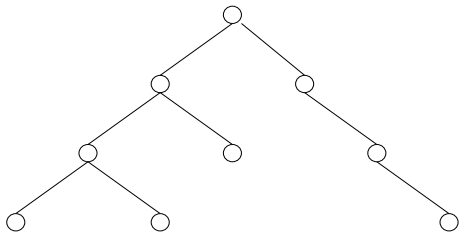


FIG. 4.2 – Un arbre binaire assez quelconque.

La complexité de ce premier algorithme est de $O(log(n))$ pour les arbres équilibrés, $O(n)$ dans le cas le pire (arbres "déséquilibrés") sur une PRAM CRCW.

Nous souhaitons maintenant écrire un second algorithme dont la complexité est meilleure que la précédente. Tout d'abord, nous rappelons qu'un circuit Eulerien d'un graphe orienté G est

un circuit passant une et une seule fois par chaque arc de G. Les sommets peuvent être visités plusieurs fois lors du parcours. Un graphe orienté G possède un circuit Eulerien si et seulement si le degré entrant de chaque nœud v est égal à son degré sortant.

Il est possible d'associer un cycle Eulerien à tout arbre binaire dans lequel on remplace les arêtes par deux arcs orientés de sens opposés, car alors le degré entrant est alors trivialement égal au degré sortant.

Remarquons que dans un arbre binaire, le degré (total) d'un noeud est d'au plus 3. Dans un circuit eulérien, tout arc est pris une unique fois, donc on passe au plus 3 fois par un noeud.

Nous associons maintenant 3 processeurs d'une machine PRAM, A_i, B_i et C_i, à chaque nœud i de l'arbre. On suppose que chacun des $3n$ processeurs possède deux variables `successeur` et `poids`. Les poids sont des valeurs entières égales à -1 (pour C_i), 0 (pour B_i) et 1 (pour A_i).

Il est alors possible de définir un chemin reliant tous les processeurs et tel que la somme des poids rencontrés sur un chemin allant de la source à un nœud C_i soit égale à la profondeur du nœud i dans l'arbre initial. En effet, il est clair que la visite d'un sous-arbre à partir d'un noeud se fait par un chemin de poids nul (car on repasse à chaque fois par un -1, 0 et un 1, de somme nulle). Donc le poids d'un noeud est égal à la somme des poids associés aux processeurs A_i, c'est-à-dire à la profondeur.

Pour obtenir un algorithme pour PRAM EREW permettant de calculer le chemin précédent, il s'agit d'initialiser les champs `successeur` et `poids` de chaque processeur à l'aide de l'arbre initial. On suppose pour simplifier que les nœuds sont identifiés à leur numéro et que $pere$, fg et fd sont des fonctions qui à un numéro associent un numéro. On suppose également que les processeurs A_i ont pour numéro $3i$, les B_i ont pour numéro $3i+1$, et les C_i ont pour numéro $3i+2$. Alors on définit :

- `successeur[3i] = 3fg[i]` si `fg[i]` est différent de `null` et `successeur[3i] = 3i+1` sinon.
- `successeur[3i+1] = 3fd[i]` si `fd[i]` est différent de `null` et `successeur[3i+1] = 3i+2` sinon.
- `successeur[3i+2] = 3pere[i]+2`

Tout ceci se fait en temps constant.

A partir de l'initialisation des champs effectuée comme précédemment, il suffit d'utiliser la technique de saut de pointeur vue à la section 4.2 sur le parcours des $3n$ processus A_i, B_i et C_i. Tout ceci se fait donc en $O(log(n))$.

4.4 Théorèmes de simulation

Dans ce paragraphe, nous discutons de la puissance comparée des machines CRCW, CREW et EREW.

Tout d'abord, remarquons que l'on peut trivialiser certains calculs sur une CRCW. Supposons que l'on souhaite calculer le maximum d'un tableau `A` à `n` éléments sur une machine CRCW à $\mathtt{n}^2$ processeurs. En fait chaque processeur va contenir un couple de valeurs `A[i]`, `A[j]` plus d'autres variables intermédiaires. Le programme est alors le suivant :

```
for each i from 1 to n in parallel
  m[i] = TRUE;
for each i, j from 1 to n in parallel
  if (A[i] < A[j])
    m[i] = FALSE;
for each i from 1 to n in parallel
  if (m[i] == TRUE)
    max = A[i];
```

La PRAM considérée fonctionne en mode CRCW en mode consistant, car tous les processeurs qui peuvent écrire en même temps sur une case (en l'occurence un `m[i]`) ne peuvent écrire que `FALSE`. On constate que l'on arrive ainsi à calculer le maximum en temps constant sur une CRCW,

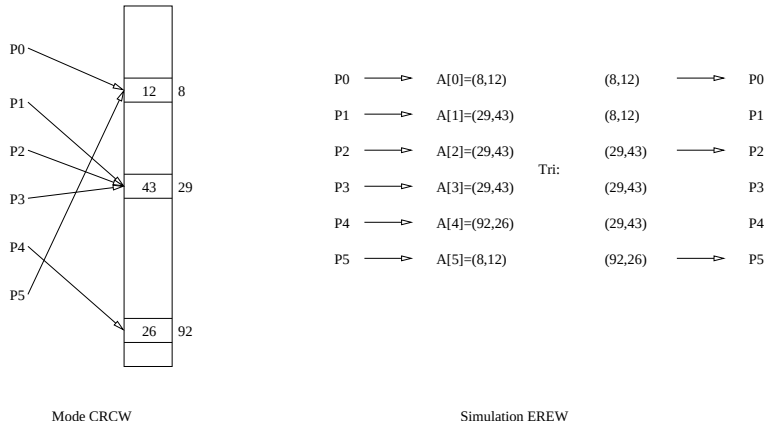


FIG. 4.3 – Codage d'un algorithme CRCW sur une PRAM EREW

alors qu'en fait, on n'avait pu faire mieux que $\lfloor log(n) \rfloor$ dans le cas d'une CREW, et même d'une EREW.

Pour séparer une CREW d'une EREW, il existe un problème simple. Supposons que l'on dispose d'un n-uplet $(e_1, \ldots, e_n)$ de nombres tous distincts, et que l'on cherche si un nombre donné e est l'un de ces e_i. Sur une machine CREW, on a un programme qui résout ce problème en temps constant, en effectuant chaque comparaison avec un e_i sur des processeurs distincts (donc n processeurs en tout) :

```
res = FALSE;
for each i in parallel {
  if (e == e[i])
    res = TRUE;
```

Comme tous les e_i sont distincts, il ne peut y avoir qu'un processeur qui essaie d'écrire sur `res`, par contre, on utilise ici bien évidemment le fait que tous les processeurs peuvent lire `e` en même temps.

Sur une PRAM EREW, il faut dupliquer la valeur de e sur tous les processeurs. Ceci ne peut se faire en un temps meilleur que $log(n)$, par dichotomie. Ceci vaut également pour l'écriture concurrente. On va maintenant voir que ce facteur est un résultat général.

Théorème Tout algorithme sur une machine PRAM CRCW (en mode consistant) à p processeurs ne peut pas être plus de $O(log(p))$ fois plus rapide que le meilleur algorithme PRAM EREW à p processeurs pour le même problème.

Soit en effet un un algorithme CRCW à p processeurs. On va simuler chaque pas de cet algorithme en $O(log(p))$ pas d'un algorithme EREW. On va pour ce faire utiliser un tableau auxiliaire A de p éléments, qui va nous permettre de réorganiser les accès mémoire. Quand un processeur P_i de l'algorithme CRCW écrit une donnée x_i à l'adresse l_i en mémoire, le processeur P_i de l'algorithme EREW effectue l'écriture exclusive $A[i] = (l_i, x_i)$. On trie alors le tableau A suivant la première coordonnée en temps $O(log(p))$ (voir algorithme de Cole, [RL03]). Une fois A trié, chaque processeur P_i de l'algorithme EREW inspecte les deux cases adjacentes $A[i] = (l_j, x_j)$ et $A[i-1] = (l_k, x_k)$, où $0 \leq j, k \leq p-1$. Si $l_j \neq l_k$ ou si $i = 0$, le processeur P_i écrit la valeur x_j à l'adresse l_j, sinon il ne fait rien. Comme A est trié suivant la première coordonnée, l'écriture est bien exclusive.

On a représenté ce codage, à travers les opérations effectuées sur le tableau A, à la figure 4.3.

Voici maintenant un autre théorème de simulation, qui a des applications plus surprenantes que l'on pourrait croire au premier abord :

Théorème (Brent) Soit A un algorithme comportant un nombre total de m opérations et qui s'exécute en temps t sur une PRAM (avec un nombre de processeurs quelconque). Alors on peut simuler A en temps $O\left(\frac{m}{p}+t\right)$ sur une PRAM de même type avec p processeurs.

En effet, à l'étape i, A effectue $m(i)$ opérations, avec $\sum_{i=1}^{n} m(i) = m$. On simule l'étape i avec p processeurs en temps $\lceil \frac{m(i)}{p} \rceil \leq \frac{m(i)}{p} + 1$. On obtient le résultat en sommant sur les étapes.

Reprenons l'exemple du calcul du maximum, sur une PRAM EREW. On peut agencer ce calcul en temps $O(log\ n)$ à l'aide d'un arbre binaire. A l'étape un, on procède paire par paire avec $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ processeurs, puis on continue avec les maxima des paires deux par deux etc. C'est à la première étape qu'on a besoin du plus grand nombre de processeurs, donc il en faut $O(n)$. Formellement, si $n = 2^m$, si le tableau `A` est de taille $2n$, et si on veut calculer le maximum des n éléments de `A` en position `A[n], A[n+1],...,A[2n-1]`, on obtient le résultat dans `A[1]` après exécution de l'algorithme :

```
for (k=m-1; k>=0; k--)
  for each j from 2^k to 2^(k+1)-1 in parallel
    A[j] = max(A[2j],A[2j+1]);
```

Supposons que l'on dispose maintenant de $p < n$ processeurs. Le théorème de Brent nous dit que l'on peut simuler l'algorithme précédent en temps $O\left(\frac{n}{p} + logn\right)$, car le nombre d'opérations total est $m = n - 1$. Si on choisit $p = \frac{n}{logn}$, on obtient la même complexité, mais avec moins de processeurs !

Tout ceci nous donne à penser qu'il existe sans doute une bonne notion de comparaison des algorithmes, sur des machines PRAM éventuellement différentes. Soit P un problème de taille n à résoudre, et soit $T_{seq}(n)$ le temps du meilleur algorithme séquentiel connu pour résoudre P. Soit maintenant un algorithme parallèle PRAM qui résout P en temps $T_{par}(p)$ avec p processeurs. Le facteur d'accélération est défini comme :

$$S_p = \frac{T_{seq}(n)}{T_{par}(p)}$$

et l'*efficacité* comme

$$e_p = \frac{T_{seq}(n)}{pT_{par}(p)}$$

Enfin, le *travail* de l'algorithme est

$$W_p = pT_{par}(p)$$

Le résultat suivant montre que l'on peut conserver le travail par simulation :

Proposition Soit A un algorithme qui s'exécute en temps t sur une PRAM avec p processeurs. Alors on peut simuler A sur une PRAM de même type avec $p' \leq p$ processeurs, en temps $O\left(\frac{tp}{p'}\right)$.

En effet, avec p' processeurs, on simule chaque étape de A en temps proportionnel à $\lceil \frac{p}{p'} \rceil$. On obtient donc un temps total de $O\left(\frac{p}{p'}t\right) = O\left(\frac{tp}{p'}\right)$.

4.5 Tris et réseaux de tris

On a vu l'importance de l'existence d'un algorithme de tri en $O(logn)$ pour les théorèmes de la section précédente. On va se contenter ici de présenter un algorithme de tri très simple, dit réseau de tri pair-impair, ceci dans un double but. Le premier est de montrer que l'on peut paralléliser efficacement un algorithme de tri, et que l'on peut en déduire des implémentations effectives. Le

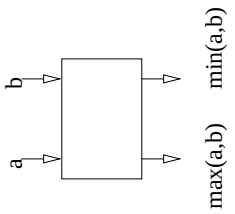


FIG. 4.4 – Un comparateur.

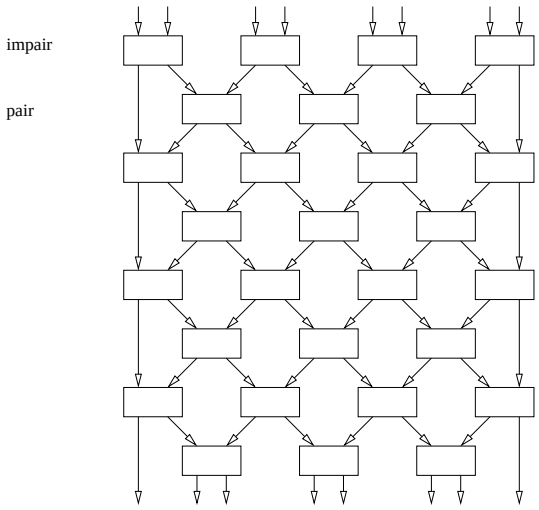


FIG. 4.5 – Réseau de tri pair-impair pour $n = 8$.

deuxième est de montrer une classe particulière de machines PRAM, spécialement introduites pour ces types de problèmes, qui sont les réseaux de tri.

Un réseau de tri est en fait une machine constituée uniquement d'une brique très simple, le comparateur (voir figure 4.4). Le comparateur est un "circuit" qui prend deux entrées, ici, a et b, et qui renvoie deux sorties : la sortie "haute" est $min(a, b)$, la sortie "basse" est $max(a, b)$.

Donnons maintenant l'exemple du réseau de tri pair-impair. Ce réseau est formé d'une succession de lignes de comparateurs. Si on désire trier $n = 2p$ éléments, on positionne p copies du réseau formé de deux lignes, dont la première consiste en p comparateurs prenant en entrées les p paires de fils $2i - 1$ et $2i$, $1 \leq i \leq p$ (étape impaire), et dont la seconde consiste en $p - 1$ comparateurs prenant en entrées les $p - 1$ paires de fils $2i$ et $2i + 1$, $1 \leq i \leq p - 1$ (étape paire) ; voir la figure 4.5 pour $n = 8$. Bien sûr, il faut bien $n = 2p$ telles lignes, car si on suppose que l'entrée est ordonnée dans le sens décroissant, de gauche à droite, il va falloir faire passer la valeur gauche (en haut) à droite (en bas), ainsi que la valeur droite (en haut) à gauche (en bas). Il y a un total de $p(2p - 1) = \frac{n(n-1)}{2}$ comparateurs dans le réseau. Le tri s'effectue en temps n, et le travail est de $O(n^3)$. C'est donc sous-optimal. Certes, moralement, le travail est réellement de $O(n^2)$ (ce qui reste sous-optimal) car à tout moment, il n'y a que de l'ordre de n processeurs qui sont actifs. C'est l'idée de l'algorithme que nous écrivons maintenant, mais que l'on ne peut pas écrire dans les réseaux de tris, dans lequel on réutilise les mêmes processeurs pour les différentes étapes du tri pair-impair.

Prenons néanmoins un peu d'avance sur les chapitres concernant la distribution, en indiquant comment ces idées qui pourraient paraître bien peu réalistes, trouvent des applications bien naturelles. Supposons que nous ayons un réseau linéaire de processeurs dans lequel les processeurs ne peuvent communiquer qu'avec leurs voisins de gauche et de droite (sauf pour les deux extrémités,

mais cela a peu d'importance ici, et on aurait pu tout à fait considérer un réseau en anneau comme on en verra à la section 8.3).

Supposons que l'on ait n données à trier et que l'on dispose de p processeurs, de telle façon que n est divisible par p. On va mettre les données à trier par paquet de $\frac{n}{p}$ sur chaque processeur. Chacune de ces suites est triée en temps $O(\frac{n}{p}log\frac{n}{p})$. Ensuite l'algorithme de tri fonctionne en p étapes d'échanges alternés, selon le principe du réseau de tri pair-impair, mais en échangeant des suites de taille $\frac{n}{p}$ à la place d'un seul élément. Quand deux processeurs voisins communiquent, leurs deux suites de taille $\frac{n}{p}$ sont fusionnées, le processeur de gauche conserve la première moitié, et celui de droite, la deuxième moitié. On obtient donc un temps de calcul en $O\left(\frac{n}{p}log\frac{n}{p} + n\right)$ et un travail de $O(n(p + log\frac{n}{p}))$. L'algorithme est optimal pour $p \leq logn$.

Chapitre 5

Coordination de processus

Dans ce chapitre, nous reprenons la programmation des threads JAVA, en y introduisant les mécanismes d'exclusion mutuelle indispensables, comme nous allons le voir maintenant, pour assurer la correction de bon nombre de programmes parallèles échangeant des données par mémoire partagée.

5.1 Problème

Modifions la classe `Compte` du chapitre 3, afin de pouvoir faire des opérations dessus, voir figure 5.1.

On fournit ainsi une méthode `solde` qui renvoie la somme qui reste sur son compte, une méthode `depot` qui permet de créditer son compte d'une somme positive, et enfin, une méthode `retirer` qui permet, si son compte est suffisament créditeur, de retirer une somme (en liquide par exemple).

On implémente alors une version idéalisée d'un automate bancaire (qui ne gérerait qu'un seul compte !), voir figure 5.2.

On a programmé en dur dans la méthode `run()` de l'automate bancaire la transaction suivante : on demande à retirer 100 euros, puis 200, puis 300 et ainsi de suite, jusqu'à épuisement de ses fonds.

Une exécution typique est la suivante :

```
% java Banque
Conseiller Mari: Voici vos 100 euros.
Conseiller Femme: Voici vos 100 euros.
Conseiller Mari: Il vous reste 800 euros.
Conseiller Femme: Il vous reste 800 euros.
Conseiller Mari: Voici vos 200 euros.
Conseiller Femme: Voici vos 200 euros.
Conseiller Femme: Il vous reste 400 euros.
Conseiller Mari: Il vous reste 400 euros.
Conseiller Mari: Voici vos 300 euros.
Conseiller Femme: Voici vos 300 euros.
Conseiller Femme: Vous etes fauches!
Conseiller Mari: Vous etes fauches! ...
```

Conclusion : le mari a retiré 600 euros du compte commun, la femme a retiré 600 euros du compte commun, qui ne contenait que 1000 euros au départ. Il est clair que le programme de gestion de compte n'est pas correct.

L'explication est simple et nous entraîne à faire un peu de sémantique.

```
public class Compte {
    private int valeur;

    Compte(int val) {
        valeur = val;
    }

    public int solde() {
        return valeur;
    }

    public void depot(int somme) {
        if (somme > 0)
            valeur+=somme;
    }

    public boolean retirer(int somme) throws InterruptedException {
        if (somme > 0)
            if (somme <= valeur) {
                Thread.currentThread().sleep(50);
                valeur -= somme;
                Thread.currentThread().sleep(50);
                return true;
            }
        return false;
    }
}
```

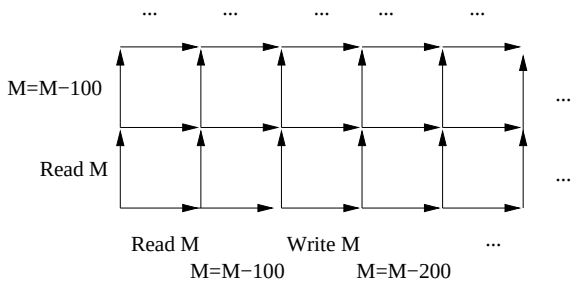
FIG. 5.1 – Opérations simples sur un compte bancaire.

```
public class Banque implements Runnable {
    Compte nom;

    Banque(Compte n) {
         nom = n; }

    public void Liquide (int montant)
           throws InterruptedException {
         if (nom.retirer(montant)) {
             Thread.currentThread().sleep(50);
             Donne(montant);
             Thread.currentThread().sleep(50); }
         ImprimeRecu();
         Thread.currentThread().sleep(50); }

    public void Donne(int montant) {
         System.out.println(Thread.currentThread().
           getName()+": Voici vos " + montant + " euros."); }

    public void ImprimeRecu() {
         if (nom.solde() > 0)
            System.out.println(Thread.currentThread().
              getName()+": Il vous reste " + nom.solde() + " euros.");
         else
            System.out.println(Thread.currentThread().
              getName()+": Vous etes fauches!");
    }

    public void run() {
        try {
           for (int i=1;i<10;i++) {
                Liquide(100*i);
                Thread.currentThread().sleep(100+10*i);
           }
        } catch (InterruptedException e) {
            return;
        }
    }

    public static void main(String[] args) {
        Compte Commun = new Compte(1000);
        Runnable Mari = new Banque(Commun);
        Runnable Femme = new Banque(Commun);
        Thread tMari = new Thread(Mari);
        Thread tFemme = new Thread(Femme);
        tMari.setName("Conseiller Mari");
        tFemme.setName("Conseiller Femme");
        tMari.start();
        tFemme.start();
    }
}
```

FIG. 5.2 – Un automate bancaire.

L'exécution de plusieurs threads se fait en exécutant une action insécable ("atomique") de l'un des threads, puis d'un autre ou éventuellement du même etc. Tous les "mélanges" possibles sont permis.

C'est ce que l'on appelle la sémantique par entrelacements ; on en représente une portion ci-dessous :



Donnons une idée de la façon de donner une sémantique à un fragment du langage JAVA (et en supposant les lectures et écritures atomiques). Nous allons prendre comme langage un langage simple qui comprend comme constructions (étant donné une syntaxe pour les `CONSTANTE`s entières et un ensemble fini de `VARIABLE`s également entières) :

EXPR	: :=	CONSTANTE	|	VARIABLE
	|	EXPR+EXPR	|	EXPR*EXPR
	|	EXPR/EXPR	|	EXPR-EXPR
TEST	: :=	EXPR==EXPR	|	EXPR < EXPR
	|	EXPR > EXPR	|	TEST && TEST
	|	TEST | | TEST	|	! TEST
INSTR	: :=	VARIABLE=EXPR		
BLOCK	: :=	ϵ	|	INSTR ;BLOCK
	|	if TEST		
		then BLOCK		
		else BLOCK ;BLOCK		
	|	while TEST		
		BLOCK ;		
		BLOCK		

Appelons L le langage engendré par la grammaire plus haut. On définit la sémantique d'un `BLOCK` inductivement sur la syntaxe, en lui associant ce que l'on appelle un système de transitions. Un système de transitions est un quadruplet $(S, i, E, Tran)$ où,

- S est un ensemble d'états,
- $i \in S$ est l'"état initial",
- E est un ensemble d'étiquettes,
- $Tran \subseteq S \times E \times S$ est l'ensemble des transitions. On représente plus communément une transition $(s, t, s') \in Tran$ par le graphe :

$$s \xrightarrow{\quad t \quad} s'$$

En fait, on représente généralement un système de transitions comme un graphe orienté et étiqueté, comme le suggère la représentation graphique de la relation de transition $Tran$, que nous avons déjà vue.

Donnons maintenant les règles de formation du système de transition correspondant à un `BLOCK`. Tout d'abord, appelons environnement une fonction de `VARIABLE` vers l'ensemble des entiers relatifs. Un état du système de transition que nous allons construire sera une paire (l, ρ) où $l \in L$ et ρ est un environnement. Intuitivement, l est le programme qu'il reste à exécuter et ρ est l'état courant de la machine, c'est à dire la valeur courante de toutes ses variables. On a alors :

–
$$(x = expr; block, \rho) \xrightarrow{x = expr} (block, \rho[x \to [\![expr]\!](\rho)])$$
où $[\![expr]\!](\rho)$ dénote la valeur entière résultat de l'évaluation de l'expression $expr$ dans l'environnement ρ (on ne donne pas les règles formelles évidentes qui donnent un sens précis à cela).
–
$$(if\ t\ then\ b_1\ else\ b_2; b_3, \rho) \xrightarrow{then} (b_1; b_3, \rho)$$
si $[\![t]\!](\rho) = vrai$ sinon
$$(if\ t\ then\ b_1\ else\ b_2; b_3, \rho) \xrightarrow{else} (b_2; b_3, \rho)$$
–
$$(while\ t\ b_1;\ b_2, \rho) \xrightarrow{while} (b_1; while\ t\ b_1;\ b_2, \rho)$$
si $[\![t]\!](\rho) = vrai$ sinon
$$(while\ t\ b_1;\ b_2, \rho) \xrightarrow{while} (b_2, \rho)$$

Maintenant, supposons que l'on ait un ensemble de processus $P_1, \ldots, P_n$ qui chacun sont écrits dans le langage L. On peut encore donner une sémantique opérationnelle (en termes de systèmes de transitions) dite par "entrelacements" en posant :
- A chaque P_j on associe par $[\![.]\!]$ défini plus haut un système de transition $(S_j, i_j, E_j, Tran_j)$,
- On définit $(S, i, E, Tran) = [\![P_1 \mid \ldots \mid P_n]\!]$ par :
  - $S = S_1 \times \ldots \times S_n$,
  - $i = (i_1, \ldots, i_n)$,
  - $E = E_1 \cup \ldots \cup E_n$,
  –
$$Tran = \left\{ \begin{array}{c} (s_1, \ldots, s_j, \ldots, s_n) \xrightarrow{t_j} (s_1, \ldots, s'_j, \ldots, s_n) \\ \\ \text{où } s_j \xrightarrow{t_j} s'_j \in Tran_j \end{array} \right\}$$

Ce n'est pas tout : jusqu'à présent cela ne donne la sémantique qu'à une machine parallèle où chacun des processus ne calcule que dans sa mémoire locale. On n'a en effet pas encore modélisé l'échange d'information entre les processus. Pour ce faire, il faut décider des variables partagées. Notons VP l'ensemble des variables partagées (les autres étant locales aux différents processus). Alors il faut changer la sémantique précédente pour que :
- $S = S_1 \times \ldots \times S_n \times S_g$, avec $S_g = VP \to \mathbb{Z}$
- la sémantique de l'affectation d'une variable globale modifie S_g et non le S_i particulier du processus en question.

Les exécutions ou traces ou entrelacements dans cette sémantique sont des suites finies :
$$s_0 = i \xrightarrow{t^1} s_1 \xrightarrow{t^2} s_2 \quad \ldots \xrightarrow{t^n} s_n$$
telles que $s_{i-1} \xrightarrow{t^i} s_i \in Tran$ pour tout i entre 1 et n.

On voit dans un des entrelacements que si les 2 threads `tMari` et `tFemme` sont exécutés de telle façon que dans `retirer`, chaque étape est faite en même temps, alors le test pourra être satisfait par les deux threads en même temps, qui donc retireront en même temps de l'argent.

Raisonner directement sur la sémantique par entrelacement est en général impossible. On en verra un peu plus loin une abstraction (au sens de [CC77]) un peu plus gérable, les schémas de preuve à la Hoare. Le domaine de la sémantique, de la preuve et de l'analyse statique de programmes (parallèles et distribués) sortent du cadre de ce cours, on pourra se reporter aux cours du MPRI pour en savoir plus.

5.2 Une solution : `synchronized`

Une solution est de rendre "atomique" le fait de `retirer` de l'argent. Cela veut dire que la méthode `retirer` sera considérée comme une action élémentaire, non-interruptible par une autre instance de `retirer`. Dis autrement encore, `retirer` s'exécutera de façon exclusive : une seule instance de cette méthode pourra être exécutée à tout instant. Cela se fait en JAVA en déclarant "synchronisée" la méthode `retirer` de la classe `Compte` :

```
public synchronized boolean retirer(int somme)
```

Maintenant l'exécution typique paraît meilleure :

```
% java Banque
Conseiller Mari: Voici vos 100 euros.
Conseiller Femme: Voici vos 100 euros.
Conseiller Mari: Il vous reste 800 euros.
Conseiller Femme: Il vous reste 800 euros.
Conseiller Mari: Voici vos 200 euros.
Conseiller Mari: Il vous reste 400 euros.
Conseiller Femme: Voici vos 200 euros.
Conseiller Femme: Il vous reste 400 euros.
Conseiller Mari: Voici vos 300 euros.
Conseiller Femme: Il vous reste 100 euros.
Conseiller Mari: Il vous reste 100 euros.
Conseiller Femme: Il vous reste 100 euros.
Conseiller Mari: Il vous reste 100 euros...
```

Le résultat est maintenant que le mari a tiré 600 euros, la femme a tiré 300 euros, et il reste bien 100 euros dans le compte commun, ouf !

Remarquez que `synchronized` peut aussi s'utiliser sur un morceau de code : étant donné un objet `obj` :

```
synchronized(obj) {
   BLOCK }
```

permet d'exécuter `BLOCK` en exclusion mutuelle.

5.3 Moniteurs

Chaque objet fournit un verrou, mais aussi un mécanisme de mise en attente (forme primitive de communication inter-threads ; similaire aux variables de conditions ou aux moniteurs [Hoa74]).

`void wait()` attend l'arrivée d'une condition sur l'objet sur lequel il s'applique (en général `this`). Il doit être appelé depuis l'intérieur d'une méthode ou d'un bloc `synchronized` (il y a aussi une version avec timeout). `void notify()` notifie un thread en attente d'une condition, de l'arrivée de celle-ci. De même, cette méthode doit être appelée depuis une méthode déclarée `synchronized`. Enfin, `void notify_all()` fait la même chose mais pour tous les threads en attente sur l'objet.

5.4 Sémaphores

5.4.1 Sémaphores binaires

Un sémaphore binaire est un objet sur lequel on peut appliquer les méthodes `P()` : un processus "acquiert" ou "verrouille" le sémaphore, et `V()` : un processus "relâche" ou "déverrouille" le sémaphore. Tant qu'un processus a un verrou sur le sémaphore, aucun autre ne peut l'obtenir.

```
public class Semaphore {
    int n;
    String name;

    public Semaphore(int max, String S) {
        n = max;
        name = S;
    }

    public synchronized void P() {
        if (n == 0) {
            try {
                 wait();
            } catch(InterruptedException ex) {};
        }
        n--;
        System.out.println("P("+name+")");
    }

    public synchronized void V() {
        n++;
        System.out.println("V("+name+")");
        notify();
    }
}
```

FIG. 5.3 – Implémentation de sémaphores.

```
public class essaiPV extends Thread {
    static int x = 3;
    Semaphore u;

    public essaiPV(Semaphore s) {
        u = s;
    }

    public void run() {
        int y;
        // u.P();

        try {
            Thread.currentThread().sleep(100);
            y = x;
            Thread.currentThread().sleep(100);
            y = y+1;
            Thread.currentThread().sleep(100);
            x = y;
            Thread.currentThread().sleep(100);
        } catch (InterruptedException e) {};
        System.out.println(Thread.currentThread().
                           getName()+": x="+x);
        // u.V();
    }

    public static void main(String[] args) {
        Semaphore X = new Semaphore(1,"X");
        new essaiPV(X).start();
        new essaiPV(X).start();
    }
}
```

FIG. 5.4 –

Cela permet de réaliser l'exclusion mutuelle, donc l'accès par des processus à des *sections critiques*, comme on le montre à la figure 5.4.

Une exécution typique de ce programme (où on a commenté les lignes `u.P()` et `u.V()`) est la suivante :

```
% java essaiPV
Thread-2: x=4
Thread-3: x=4
```

En effet, dans ce cas, les deux processus s'exécutent de façon à peu près synchrone, lisent tous les deux x et trouvent la valeur 3, incrémentent en même temps leur copie locale, pour écrire la valeur 4 dans x.

Maintenant, si on décommente `u.P()` et `u.V()`, on a par exemple :

```
% java essaiPV
P(X)
Thread-2: x=4
V(X)
P(X)
Thread-3: x=5
V(X)
```

La seule autre exécution possible est celle dans laquelle c'est le `Thread-3` qui aurait calculé 4 et le `Thread-2` qui aurait calculé 5. Dans ce cas (c'est un exemple de programme séquentialisable, voir section 5.6), l'exclusion mutuelle assurée par le sémaphore binaire u permet de faire en sorte que les exécutions parallèles sont toutes "équivalentes" à une des exécutions séquentielles, dans n'importe quel ordre, de l'ensemble des processus présents, considérés comme insécables.

5.4.2 Un peu de sémantique

On va rajouter à notre langage L les primitives $P(.)$ et $V(.)$. La sémantique par systèmes de transitions change assez peu :

- On rajoute dans l'ensemble d'états S du système de transitions une composante nouvelle qui est une fonction $\kappa : VARIABLE \to \{0, 1\}$. Donc $S = (S_1, \ldots, S_n, S_g, \kappa)$. Cette fonction κ représente le fait qu'une variable est verrouillée par un processus ou non,
- $i = (P_1, \ldots, P_n, \kappa_0)$ où κ_0 est la fonction qui donne uniformément 1 (aucune variable n'est encore verrouillée),
- E contient maintenant les nouvelles actions Px et Vx pour toutes les variables x du programme,
- On a de nouvelles transitions dans $Tran$ de la forme :

$$(b_1, \ldots, Px; b_j, \ldots, b_n, \kappa) \xrightarrow{Px} (b_1, \ldots, b_j, \ldots, b_n, \kappa')$$

si $\kappa(x) = 1$; et alors $\kappa'(y) = \kappa(y)$ pour tout $y \neq x$ et $\kappa'(x) = 0$, et,

$$(b_1, \ldots, Vx; b_j, \ldots, b_n, \kappa) \xrightarrow{Vx} (b_1, \ldots, b_j, \ldots, b_n, \kappa')$$

avec $\kappa'(y) = \kappa(y)$ pour tout $y \neq x$ et $\kappa'(x) = 1$.

Ceci implique, par omission en quelque sorte, qu'aucune exécution d'un Px n'est possible si $\kappa(x) = 0$, c'est à dire quand la ressource x n'est pas disponible. C'est ce qui permet de modéliser le blocage d'un processus en attendant la libération d'une ressource, et donc l'exclusion mutuelle.

L'apparition de ces nouvelles transitions contraint en fait les entrelacements possibles. Si on "abstrait" ce système de transition (et le langage de base) à de simples suites de verrouillages et déverrouillages de variables partagées, on peut facilement se rendre compte de ce qui peut se passer.

Un des problèmes les plus courants est d'avoir voulu trop protéger les accès partagés et d'aboutir à une situation où les processus se bloquent mutuellement ; on dit alors qu'il y a une étreinte fatale, ou encore que le système de transition a des points morts (des états desquels aucune transition n'est possible, mais qui ne sont pas des états finaux autorisés : ces états finaux autorisés seraient uniquement en général des n-uplets des états finaux de chacun des processus).

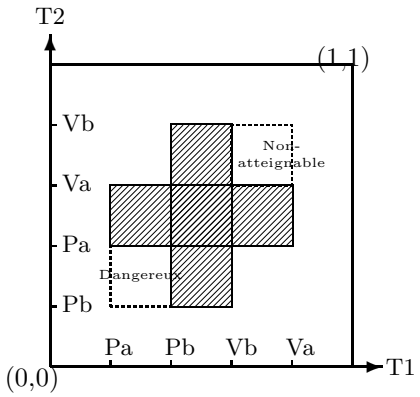
Un exemple classique est donné par le programme "abstrait" suivant constitué des deux processus :

```
A=Pa;Pb;Va;Vb
B=Pb;Va;Vb;Va
```

En regardant la sémantique par entrelacements, on trouve assez vite qu'une exécution synchrone de `A` et de `B` rencontre un point mort : en effet dans ce cas `A` (respectivement `B`) acquiert `a` (respectivement `b`) et attend ensuite la ressource `b` (respectivement `a`).

Une image pratique (qui s'abstrait élégamment de la lourdeur de la représentation des entrelacements) est d'utiliser une image géométrique continue, les "progress graphs" (E.W.Dijkstra (1968)), en français, "graphes d'avancement".

Associons en effet à chaque processus une coordonnée dans un espace $\mathbb{R}^n$ (n étant le nombre de processus). Chaque coordonnée x_i représente en quelque sorte le temps local du $i$ème processus. Les états du système parallèle sont donc des points dans cet espace $\mathbb{R}^n$ (inclus dans un hyperrectangle dont les bornes en chaque coordonnée sont les bornes des temps locaux d'exécution de chaque processus). Les traces d'exécution sont les chemins continus et croissants dans chaque coordonnée. Dans la figure suivante, on a représenté le graphe de processus correspondant à nos deux processus `A` et `B`.



On constate que certains points dans le carré unité ne sont pas des états valides du programme parallèle. Prenons un point qui a pour coordonnée T_1 un temps local compris entre P_b et V_b et pour coordonnée T_2 un temps local compris également entre P_b et V_b (mais cette fois pour le processus `B`). Il ne peut être valide car dans cet état, les deux processus auraient chacun un verrou sur le même objet `b`. Cela contredit la sémantique par système de transitions vue auparavant, c'est à dire que cela contredit la propriété d'exclusion mutuelle sur `b`. On doit également interdire le rectangle horizontal, à cause de la propriété d'exclusion mutuelle sur la variable partagée `a`.

On s'aperçoit maintenant que tout chemin d'exécution (partant donc du point initial en bas à gauche du graphe d'avancement) et qui rentrerait dans le carré marqué "dangereux" doit nécessairement (par sa propriété de croissance en chaque coordonnée et par sa continuité) aboutir au point mort, minimum des intersections des deux rectangles interdits. Cette concavité inférieure est responsable de l'étreinte fatale entre les processus `A` et `B`. De même on s'aperçoit que certains états, dans la concavité supérieure de la région interdite, sont des états inatteignables depuis l'état initial. On reviendra la-dessus et sur des critères plus simples pour trouver si un système a des points morts à la section 5.4.4. Sachez simplement que ces idées apparemment simples peuvent être développées extrêmement loin (voir par exemple [Gou03]).

Remarquez également que `synchronized` de JAVA ne fait jamais que `P` du verrou associé à une méthode ou à un bloc de code, puis `V` de ce même verrou à la fin de ce même code. Une méthode `M` de la classe `A` qui est `synchronized` est équivalente à `P(A)`, corps de `M`, `V(A)`. Il y a malgré tout une subtile différence. La construction `synchronized` est purement déclarative et a donc une portée définie statiquement, contrairement à l'utilisation de `P` et `V`.

On retrouvera des considérations sémantiques plus simples, dans le cas du passage de messages, et des approches de preuve de programmes, dans le TD consacré à l'algèbre de processus CCS.

5.4.3 Un complément sur la JVM

Pour bien comprendre la sémantique des communications inter-threads en JAVA, il nous faut expliquer un peu en détail comment la JVM traite les accès mémoire des threads.

Toutes les variables (avec leurs verrous correspondants et la liste des threads en attente d'accès) de tous les threads sont stockées dans la mémoire gérée par la JVM correspondante. Bien évidemment, les variables locales d'un thread ne peuvent pas être accédées par d'autres threads, donc on peut imaginer que chaque thread a une mémoire locale et a accès à une mémoire globale.

Pour des raisons d'efficacité, chaque thread a une copie locale des variables qu'il doit utiliser, et il faut bien sûr que des mises à jour de la mémoire principale (celle gérée par la JVM) soient effectuées, de façon cohérente.

Plusieurs actions *atomiques* (c'est à dire non interruptibles, ou encore qui ne s'exécuteront qu'une à la fois sur une JVM) peuvent être effectuées pour gérer ces copies locales de la mémoire principale, au moins pour les types simples (`int`, `float`...). Ces actions décomposent les accès mémoires qui sont nécessaires à l'interprétation d'une affectation JAVA :

- les actions qu'un thread peut exécuter sont :
  - *use* transfère le contenu de la copie locale d'une variable à la machine exécutant le thread.
  - *assign* transfère une valeur de la machine exécutant le thread à la copie locale d'une variable de ce même thread.
  - *load* affecte une valeur venant de la mémoire principale (après un *read*, voir plus loin) à la copie locale à un thread d'une variable.
  - *store* transfère le contenu de la copie locale à un thread d'une variable à la mémoire principale (qui va ainsi pouvoir faire un *write*, voir plus loin).
  - *lock* réclame un verrou associé à une variable à la mémoire principale.
  - *unlock* libère un verrou associé à une variable.
- les actions que la mémoire principale (la JVM) peut exécuter sont :
  - *read* transfère le contenu d'une variable de la mémoire principale vers la mémoire locale d'un thread (qui pourra ensuite faire un `load`).
  - *write* affecte une valeur transmise par la mémoire locale d'un thread (par *store*) d'une variable dans la mémoire principale.

Pour les types "plus longs" comme `double` et `long`, la spécification permet tout à fait que *load*, *store*, *read* et *write* soient non-atomiques. Elles peuvent par exemple être composées de deux *load* atomiques de deux "sous-variables" *int* de 32 bits. Le programmeur doit donc faire attention à synchroniser ses accès à de tels types, s'ils sont partagés par plusieurs threads.

L'utilisation par la JVM de ces instructions élémentaires est soumise à un certain nombre de contraintes, qui permettent de définir la sémantique fine des accès aux ressources partagées de JAVA. Tout d'abord, pour un thread donné, à tout *lock* correspond plus tard une opération *unlock*. Ensuite, chaque opération *load* est associée à une opération *read* qui la précède ; de même chaque *store* est associé à une opération *write* qui la suit.

Pour une variable donnée et un thread donné, l'ordre dans lequel des *read* sont faits par la mémoire locale (respectivement les *write*) est le même que l'ordre dans lequel le thread fait les *load* (respectivement les *store*). Attention, ceci n'est vrai que pour une variable donnée ! Pour les variables *volatile*, les règles sont plus contraignantes car l'ordre est aussi respecté entre les *read*/*load* et les *write*/*store* entre les variables. Pour les *volatile* on impose également que les *use* suivent immédiatement les *load* et que les *store* suivent immédiatement les *assign*.

```
class Essai1 extends Thread {
  public Essai1(Exemple1 e) {
    E = e;
  }

  public void run() {
    E.F1();
  }

  private Exemple1 E;
}
class Essai2 extends Thread {
  public Essai2(Exemple1 e) {
    E = e;
  }

  public void run() {
    E.G1();
  }

  private Exemple1 E;
}

class Lance {
  public static void main(String args[]) {
    Exemple1 e = new Exemple1();

    Essai1 T1 = new Essai1(e);
    Essai2 T2 = new Essai2(e);

    T1.start();
    T2.start();
    System.out.println("From Lance a="+e.a+" b="+e.b);
  }
}
```

FIG. 5.5 – Classe Essai1.

Pour bien comprendre tout cela prenons deux exemples classiques, aux figures 5.6 et 5.7 respectivement. On utilise ces classes dans deux threads de la même façon, on en donne donc le code à la figure 5.5 uniquement dans le cas de `Exemple1`.

Une exécution typique est :

```
> java Lance
a=2 b=2
```

Mais il se peut que l'on trouve également :

```
> java Lance
a=1 b=1
```

ou encore

```
> java Lance
a=2 b=1
```

```
class Exemple1 {
  int a = 1;
  int b = 2;

  void F1() {
    a = b;
  }

  void G1() {
    b = a;
  }
}
```

FIG. 5.6 – Classe Exemple1.

```
class Exemple2 {
  int a = 1;
  int b = 2;

  synchronized void F2() {
    a = b;
  }

  synchronized void G2() {
    b = a;
  }
}
```

FIG. 5.7 – Classe Exemple2

En fait, pour être plus précis, les contraintes d'ordonnancement font que les chemins possibles d'exécution sont les entrelacements des 2 traces séquentielles

$$read\ b \longrightarrow load\ b \longrightarrow use\ b \longrightarrow assign\ a \longrightarrow store\ a \longrightarrow write\ a$$

pour le thread `Essai1` et

$$read\ a \longrightarrow load\ a \longrightarrow use\ a \longrightarrow assign\ b \longrightarrow store\ b \longrightarrow write\ b$$

pour le thread `Essai2`. Appelons $la1$, $lb1$ (respectivement $la2$ et $lb2$) les copies locales des variables a et b pour le thread `Essai1` (respectivement pour le thread `Essai2`). Alors on peut avoir les entrelacement suivants (modulo les commutations des *read a* et *read b*, ce qui n'a aucune influence sur le calcul) :

$$read\ b \longrightarrow write\ a \longrightarrow read\ a \longrightarrow write\ b$$

$$read\ a \longrightarrow write\ b \longrightarrow read\ b \longrightarrow write\ a$$

$$read\ a \longrightarrow read\ b \longrightarrow write\ b \longrightarrow write\ a$$

Dans le premier cas l'état de la machine est $la1 = 2$, $lb1 = 2$, $a = 2$, $b = 2$, $la2 = 2$ et $lb2 = 2$. Dans le deuxième on a $la1 = 1$, $lb1 = 1$, $a = 1$, $b = 1$, $la2 = 1$ et $lb2 = 1$. Enfin dans le troisième, on a $la1 = 2$, $lb1 = 2$, $a = 2$, $b = 1$, $la2 = 1$ et $lb2 = 1$.

Si on utilise la version synchronisée de `Exemple1`, qui est `Exemple2` à la figure 5.7, alors on n'a plus que les deux premiers ordonnancements qui soient possibles :

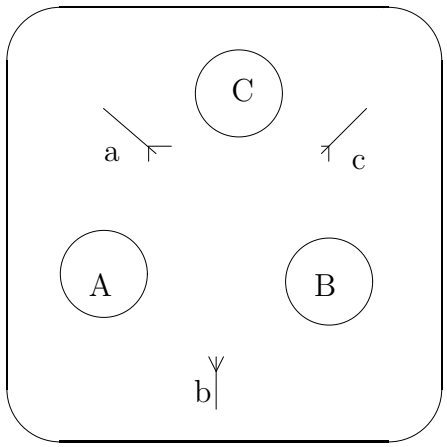
$$read\ b \longrightarrow write\ a \longrightarrow read\ a \longrightarrow write\ b$$

$$read\ a \longrightarrow write\ b \longrightarrow read\ b \longrightarrow write\ a$$

5.4.4 Quelques grands classiques

Exerçons un peu nos talents sur des problèmes classiques du parallélisme (que vous aurez peut-être vu par ailleurs, par exemple en cours de système d'exploitation).

Le premier problème est celui des philosophes qui dînent (introduit par E. W. Dijkstra [Dij68]). Dans le cas général, on a n philosophes assis autour d'une table (plus ou moins) ronde :



avec chacun une fourchette à sa gauche et une autre à sa droite. On n'a pas représenté ici le sujet principal : le bol de spaghettis supposé être au centre. Les philosophes voulant manger, doivent utiliser les 2 fourchettes en même temps pour se servir de spaghettis. Un des premiers "protocoles" venant à l'esprit est celui dans lequel chaque philosophe essaie d'attraper sa fourchette gauche,

puis droite, se sert et enfin repose la fourchette gauche puis droite. Cela donne en JAVA le code de la figure 5.8.

Une exécution typique est :

```
% java Dining
Kant: P(a)
Heidegger: P(b)
Spinoza: P(c)
^C
```

On constate un interblocage des processus. Comment aurions nous pu nous en douter ? L'explication est simple : quand les trois philosophes prennent en même temps leur fourchette gauche, ils attendent tous leur fourchette droite... qui se trouve être la fourchette gauche de leur voisin de droite.

On s'aperçoit que ce point mort est simplement dû à un cycle dans les demandes et attributions des ressources partagées. Essayons de formaliser un peu cela.

Construisons un graphe orienté (le "graphe de requêtes") dont les noeuds sont les ressources et dont les arcs sont comme suit. On a un arc d'un noeud a vers un noeud b si il existe un processus qui, ayant acquis un verrou sur a (sans l'avoir relaché), demande un verrou sur b. On étiquette alors cet arc par le nom du processus en question. Alors on peut facilement montrer que si le graphe de requêtes est *acyclique* alors le système constitué par les threads considérés ne peut pas rentrer en interblocage. En abstrayant le programme JAVA pour ne s'intéresser plus qu'aux suites de verrouillages et déverrouillages, on obtient les trois processus suivants en parallèle :

```
A=Pa;Pb;Va;Vb
B=Pb;Pc;Vb;Vc
C=Pc;Pa;Vc;Va
```

Un exemple en est donné à la figure 5.9, correspondant aux 3 philosophes, et ce graphe est bien cyclique.

On pouvait aussi s'en apercevoir sur le graphe d'avancement : le point mort est du à l'intersection de 3 (=nombre de processus) hyperrectangles, ou encore la concavité "inférieure" de la figure 5.11...mais cela nous entraînerait trop loin.

La condition sur les graphes de requêtes est une condition suffisante à l'absence de points morts, et non nécessaire comme le montre l'exemple suivant (où `A`, `B` et `C` sont encore 3 threads exécutés en parallèle) :

```
A=Px;Py;Pz;Vx;Pw;Vz;Vy;Vw
B=Pu;Pv;Px;Vu;Pz;Vv;Vx;Vz
C=Py;Pw;Vy;Pu;Vw;Pv;Vu;Vv
```

dont on trouve le graphe de requêtes (fortement cyclique !) à la figure 5.12. Pour avoir une idée de pourquoi cette politique d'accès aux ressources partagées n'a pas de point mort, il faut regarder le graphe d'avancement, représenté à la figure 5.13. La région interdite est homéomorphe à un tore (plus ou moins sur l'antidiagonale du cube... c'est une image bien sûr !) et le chemin passant au milieu du tore n'est jamais stoppé par une concavité intérieure.

Comment remédier au problème d'interblocage dans le cas des n philosophes ? Il faut réordonnancer les accès aux variables partagées. Il y a beaucoup de solutions (éventuellement avec ordonnanceur extérieur). Il y en a en fait une très simple : on numérote les philosophes, par exemple dans le sens trigonométrique autour de la table. On impose maintenant que les philosophes de numéro pair acquièrent la fourchette gauche d'abord, puis la droite et aussi que les philosophes de numéro impair acquièrent la fourchette droite d'abord, puis la gauche. Cela donne (en terme de `P` et de `V`) :

```
public class Phil extends Thread {
    Semaphore LeftFork;
    Semaphore RightFork;

    public Phil(Semaphore l, Semaphore r) {
        LeftFork = l;
        RightFork = r;
    }

    public void run() {
        try {
            Thread.currentThread().sleep(100);
            LeftFork.P();
            Thread.currentThread().sleep(100);
            RightFork.P();
            Thread.currentThread().sleep(100);
            LeftFork.V();
            Thread.currentThread().sleep(100);
            RightFork.V();
            Thread.currentThread().sleep(100);
        } catch (InterruptedException e) {};
    }
}

public class Dining {

    public static void main(String[] args) {
        Semaphore a = new Semaphore(1,"a");
        Semaphore b = new Semaphore(1,"b");
        Semaphore c = new Semaphore(1,"c");
        Phil Phil1 = new Phil(a,b);
        Phil Phil2 = new Phil(b,c);
        Phil Phil3 = new Phil(c,a);
        Phil1.setName("Kant");
        Phil2.setName("Heidegger");
        Phil3.setName("Spinoza");
        Phil1.start();
        Phil2.start();
        Phil3.start();
    } }
```

FIG. 5.8 – Implémentation des trois philosophes.

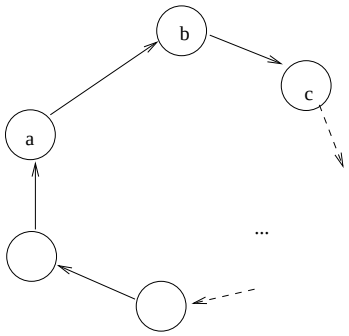


FIG. 5.9 – Le graphe de requêtes pour n philosophes.

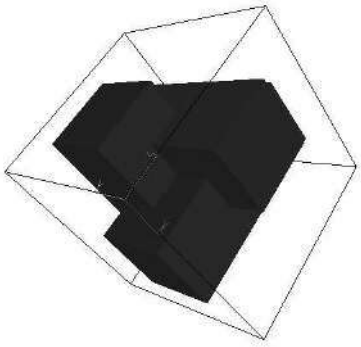


FIG. 5.10 – Graphe d'avancement des 3 philosophes

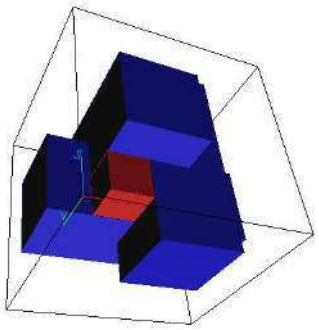


FIG. 5.11 – Point mort des 3 philosophes

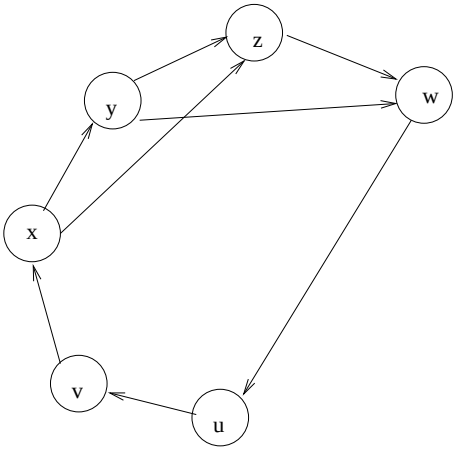


FIG. 5.12 – Graphe de requêtes pour l'exemple Lipsky/Papadimitriou.

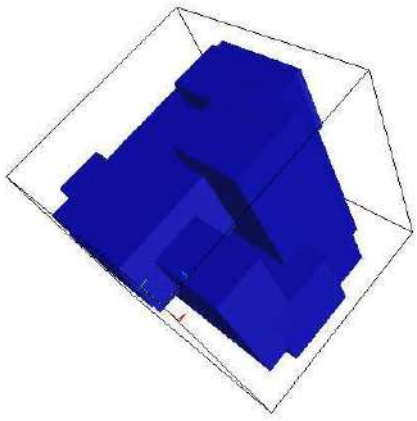


FIG. 5.13 – Graphe de processus pour le terme de Lipsky et Papadimitriou.

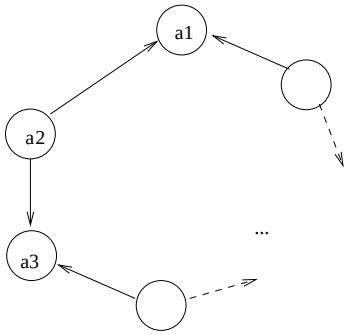


FIG. 5.14 – Le nouveau graphe de requêtes.

```
P1=Pa2;Pa1;Va2;Va1
P2=Pa2;Pa3;Va2;Va3
...
P2k=Pa2k;Pa(2k+1);Va2k;Va(2k+1)
P(2k+1)=Pa(2k+2);Pa(2k+1);Va(2k+2);Va(2k+1)
```

Le graphe de requêtes est décrit à la figure 5.14, on voit bien qu'il est acyclique, donc que le système de processus ne rencontre pas de points morts.

5.4.5 Sémaphores à compteur

On a parfois besoin d'objets qui peuvent être partagés par n processus en même temps et pas par $n+1$. C'est une généralisation évidente des sémaphores binaires (qui sont le cas $n = 1$). Par exemple, on peut avoir à protéger l'accès à des tampons de messages de capacité n. On appelle les sémaphores correspondants, les sémaphores à compteur. Il sont en fait implémentables à partir des sémaphores binaires [Dij68], comme le fait le code de la figure 5.15.

Par exemple :

```
% java essaiPVsup
Thread-2: P(X)
```

```
public class essaiPVsup extends Thread {
    static int x = 3;
    Semaphore u;

    public essaiPVsup(Semaphore s) {
        u = s;
    }

    public void run() {
        int y;
        u.P();
        try {
            Thread.currentThread().sleep(100);
            y = x;
            Thread.currentThread().sleep(100);
            y = y+1;
            Thread.currentThread().sleep(100);
            x = y;
            Thread.currentThread().sleep(100);
        } catch (InterruptedException e) {};
        System.out.println(Thread.currentThread().
                           getName()+": x="+x);
        u.V(); }

    public static void main(String[] args) {
        Semaphore X = new Semaphore(2,"X");
        new essaiPVsup(X).start();
        new essaiPVsup(X).start();
    }
}
```

FIG. 5.15 – Utilisation de sémaphores à compteur.

```
Thread-3: P(X)
Thread-2: x=4
Thread-2: V(X)
Thread-3: x=4
Thread-3: V(X)
```

On voit bien que l'on n'a pas d'exclusion mutuelle.

Pour les tampons de capacité bornée cela peut servir comme on l'a déjà dit (problème du type producteur consommateur) et comme on le montre par un petit code JAVA à la figure 5.16.

Dans cet exemple, on a 3 processus qui partagent une file à 2 cellules protégée (en écriture) par un 2-sémaphore. Chaque processus essaie de produire (`push`) et de consommer (`pop`) des données dans cette file. Pour que la file ne perde jamais de messages, il faut qu'elle ne puisse pas être "partagée" en écriture par plus de 2 processus en même temps.

Un exemple typique d'exécution est le suivant :

```
% java essaiPVsup2
Thread-2: P(X)
Thread-2: push
Thread-3: P(X)
Thread-3: push
Thread-2: pop
Thread-3: pop
Thread-2: V(X)
Thread-3: V(X)
Thread-4: P(X)
Thread-4: push
Thread-4: pop
Thread-4: V(X)
```

5.5 Barrières de synchronisation

Un autre mécanisme de protection, ou plutôt de synchronisation qui est couramment utilisé dans les applications parallèles est ce qu'on appelle une barrière de synchronisation. Son principe est que tout processus peut créer une barrière de synchronisation (commune à un groupe de processus) qui va permettre de donner un rendez-vous à exactement n processus. Ce point de rendez-vous est déterminé par l'instruction `waitForRest()` dans le code de chacun des processus. On en donne une implémentation (tirée du livre [OW00]) à la figure 5.17.

L'idée est d'utiliser un compteur du nombre de threads qu'il faut encore attendre (`threads2wa-it4`) et de bloquer tous les processus par un `wait` tant que le quorum n'est pas atteint. On débloque alors tout le monde par un `notifyAll`. Le champ privé `iex` est là pour permettre de récupérer proprement les exceptions.

Un exemple d'utilisation typique est donné à la figure 5.18.

5.6 Un exemple d'ordonnancement : séquentialisation

Considérez le problème suivant. On a une base de données distribuée qui contient les réservations aériennes et hotelières d'une grande compagnie. Les clients réservent leurs billets au travers d'agences dans le monde entier, qui donc n'ont aucun moyen direct de se synchroniser. Les informations sur les réservations sont dans une mémoire d'ordinateur unique quelque part sur la planète. Supposons que nous ayons deux clients, Bill et Tom, les deux habitant Paris, et souhaitant prendre chacun deux places sur un avion pour New York. Supposons encore que ces deux clients veulent en fait exactement les mêmes vols et qu'il ne reste plus que deux places sur ce vol. Comment faire

```
public class essaiPVsup2 extends Thread {
    static String[] x = {null,null};
    Semaphore u;

    public essaiPVsup2(Semaphore s) {
        u = s;
    }

    public void push(String s) {
        x[1] = x[0];
        x[0] = s;
    }

    public String pop() {
        String s = x[0];
        x[0] = x[1];
        x[1] = null;
        return s; }

    public void produce() {
        push(Thread.currentThread().getName());
        System.out.println(Thread.currentThread().
                           getName()+": push");
    }

    public void consume() {
        pop();
        System.out.println(Thread.currentThread().
                           getName()+": pop"); }

    public void run() {
        try {
            u.P();
            produce();
            Thread.currentThread().sleep(100);
            consume();
            Thread.currentThread().sleep(100);
            u.V();
        } catch(InterruptedException e) {};
    }

    public static void main(String[] args) {
        Semaphore X = new Semaphore(2,"X");
        new essaiPVsup2(X).start();
        new essaiPVsup2(X).start();
        new essaiPVsup2(X).start();
    }
}
```

FIG. 5.16 – Producteur/consommateur, avec des sémaphores à compteur.

```
public class Barrier {
    private int threads2Wait4;
    private InterruptedException iex;

    public Barrier(int nThreads) {
        threads2Wait4 = nThreads;
    }

    public synchronized int waitForRest()
        throws InterruptedException {
        int threadNum = --threads2Wait4;
        if (iex != null) throw iex;
        if (threads2Wait4 <= 0) {
            notifyAll();
            return threadNum;
        }
        while (threads2Wait4 > 0) {
            if (iex != null) throw iex;
            try {
                wait();
            } catch(InterruptedException ex) {
                iex = ex;
                notifyAll();
            }
        }
        return threadNum;
    }

    public synchronized void freeAll() {
        iex = new InterruptedException("Barrier Released
                                        by freeAll");
        notifyAll();
    }
}
```

FIG. 5.17 – Implémentation d'une barrière de synchronisation en JAVA.

```
public class ProcessIt implements Runnable {
    String[] is;
    Barrier bpStart, bp1, bp2, bpEnd;
    public ProcessIt(String[] sources) {
        is = sources;
        bpStart = new Barrier(sources.length);
        bp1 = new Barrier(sources.length);
        bp2 = new Barrier(sources.length);
        bpEnd = new Barrier(sources.length);
        for (int i=0;i<is.length; i++) {
            (new Thread(this)).start(); } }

    public void run() {
        try {
            int i = bpStart.waitForRest();
            doPhaseOne(is[i]);
            bp1.waitForRest();
            doPhaseTwo(is[i]);
            bp2.waitForRest();
            doPhaseThree(is[i]);
            bpEnd.waitForRest();
        } catch(InterruptedException ex) {};
    }

    public void doPhaseOne(String ps) {
    }

    public void doPhaseTwo(String ps) {
    }

    public void doPhaseThree(String ps) {
    }

    static public void main(String[] args) {
        ProcessIt pi = new ProcessIt(args);
    }
}
```

FIG. 5.18 – Essai des barrières de synchronisation.

en sorte de servir ces deux clients de façon cohérente, c'est-à-dire que Bill ou Tom ait les deux places, mais pas seulement une partie (car sinon, ils ne voudraient pas partir du tout) ?

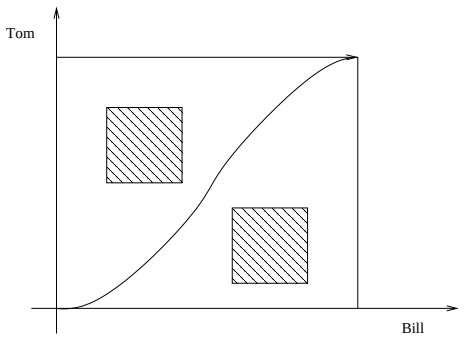
Regardons le programme implémentant les requêtes de Bill et Tom de la figure 5.19.

Le résultat est :

```
% java Serial
Bill: P(a)
Tom: P(b)
Bill: V(a)
Tom: V(b)
Bill: P(b)
Tom: P(a)
Bill: V(b)
Tom: V(a)
Le premier billet Paris->New York est au nom de: Bill
Le deuxieme billet Paris->New York est au nom de: Tom
```

Ce qui n'est pas très heureux : en fait aucun des deux clients ne sera content car chacun pourra partir, mais seul ! Ceci est du au fait que les demandes ont été entrelacées.

Il est facile de voir que le chemin d'exécution qui vient d'être pris correspond à un chemin sur la diagonale du graphe d'avancement (où les deux rectangles du centre représentent les états interdits) :



qui "mélange" les transactions de nos deux utilisateurs.

Il existe plusieurs protocoles permettant d'atteindre un état plus cohérent de la base de données. Par exemple le protocole "2-phase locking" (voir [Abi00]) où chacun des deux clients essaie d'abord de verrouiller tous les billets voulus, avant d'y mettre son nom et de payer, puis de tout déverrouiller, permet cela. On dit que ce protocole est "séquentialisable", c'est à dire que tous les accès à la base de données distribuées se font comme si les deux clients étaient dans une même agence, et surtout dans une file ordonnée...

Quand on change dans `Requete`, l'ordre des verrous, dans la méthode `run()`, on obtient le programme de la figure 5.20 et l'exécution :

```
% java Serial2
Bill: P(a)
Bill: P(b)
Bill: V(a)
Bill: V(b)
Tom: P(b)
Tom: P(a)
Tom: V(b)
Tom: V(a)
Le premier billet Paris->New York est au nom de: Bill
Le deuxieme billet Paris->New York est au nom de: Bill
```

```
public class Ticket {
    String nom;}

public class Requete extends Thread {
    Ticket Aller;
    Ticket Aller2;
    Semaphore u;
    Semaphore v;
    public Requete(Ticket t, Ticket s,
                   Semaphore x, Semaphore y) {
        Aller = t;
        Aller2 = s;
        u = x;
        v = y; }

    public void run() {
        try {
            u.P();
            Thread.currentThread().sleep(100);
            if (Aller.nom == null)
                 Aller.nom = Thread.currentThread().
                                    getName();
            Thread.currentThread().sleep(100);
            u.V();
        } catch (InterruptedException e) {};
        try {
            v.P();
            Thread.currentThread().sleep(100);
            if (Aller2.nom == null)
                Aller2.nom = Thread.currentThread().
                                    getName();
            Thread.currentThread().sleep(100);
            v.V();
        } catch (InterruptedException e) {};
    }
}

public class Serial {
    public static void main(String[] args) {
        Semaphore a = new Semaphore(1,"a");
        Semaphore b = new Semaphore(1,"b");
        Ticket s = new Ticket();
        Ticket t = new Ticket();
        Requete Bill = new Requete(s,t,a,b);
        Requete Tom = new Requete(t,s,b,a);
        Bill.setName("Bill");
        Tom.setName("Tom");
        Bill.start();
        Tom.start();
        try {
            Tom.join();
            Bill.join();
        } catch(InterruptedException e) {};
        System.out.println("Le premier billet Paris->New York
                            est au nom de: "+s.nom);
        System.out.println("Le deuxieme billet New York->Paris
                            est au nom de: "+t.nom); } }
```

FIG. 5.19 – Base de donnée de billets d'avions.

```
public void run() {
    try {
        u.P();
        v.P();
        Thread.currentThread().sleep(100);
        if (Aller.nom == null)
            Aller.nom = Thread.currentThread().
                                getName();
        Thread.currentThread().sleep(100);
        Thread.currentThread().sleep(100);
        if (Aller2.nom == null)
            Aller2.nom = Thread.currentThread().
                                 getName();
        Thread.currentThread().sleep(100);
        u.V();
        v.V();
    } catch (InterruptedException e) {};
}
```

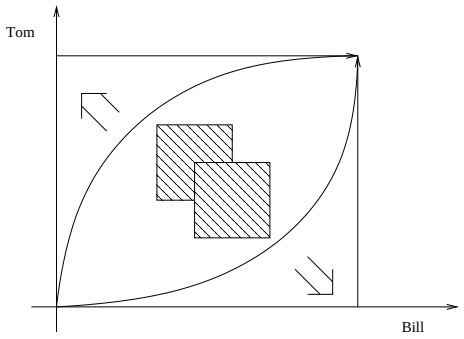
FIG. 5.20 – Une politique d'ordonnancement séquentialisable pour la base de données de billets d'avion.

qui ne satisfait vraiment que Bill mais qui au moins est cohérent !

Evidemment, il est aussi possible dans ce cas qu'une exécution donne également un interblocage :

```
% java Serial2
Bill: P(a)
Tom: P(b)
^C
```

On s'aperçoit que dans le cas de la figure 5.20, le graphe d'avancement interdit des chemins non séquentialisables, mais effectivement pas les points morts (les rectangles au centre sont des régions interdites) :



Les seules obstructions sont "au centre" : on peut déformer tout chemin sur l'un des bords, c'est à dire sur l'ensemble des chemins séquentiels. C'est là l'essence de la preuve géométrique de correction du protocole 2PL de [Gun94]. Pour enlever le point mort possible, il suffit de réordonnancer la demande de Bill ou de Tom, pour qu'elle soit dans le même ordre (cf. graphe de requêtes).

Chapitre 6

Algorithmes d'exclusion mutuelle (mémoire partagée)

6.1 Peut-on se passer de `synchronized` ?

On cherche à programmer un mécanisme d'"exclusion mutuelle", en mémoire partagée, à partir des primitives que l'on a vues, sauf les primitives de synchronisation `synchronized`, `wait` et `notify`. On doit évidemment avoir une hypothèse de base sur la sémantique du système sous-jacent. On ne va imposer comme condition que le fait que la lecture et l'écriture en mémoire sont `atomiques`, c'est-à-dire que plusieurs lectures et écritures en parallèle sont en fait exécutées séquentiellement dans un ordre à priori quelconque. Ceci n'est pas toujours vrai en JAVA, mais nous présenterons quand même le pseudo-code en JAVA.

On veut donc pouvoir faire en sorte qu'un thread impose à tous les autres d'être l'unique à s'exécuter (pendant que les autres attendent leur tour). En fait, on pourra se déclarer content d'un algorithme d'exclusion mutuelle seulement s'il satisfait les conditions suivantes :

- (A) si un thread se trouve en section critique, tout autre thread doit être en train d'exécuter une section non-critique.
- (B) supposons qu'un groupe de threads I exécute du code dans une section non-critique, et ne requiert pas encore d'accéder à une section critique. Supposons maintenant que tous les autres processus (groupe J) requièrent l'accès à une section critique, mais qu'ils n'en ont pas encore obtenu la permission. Alors le processus qui doit rentrer en section critique doit appartenir à J, et cette permission ne doit pas pouvoir être reportée indéfiniment.
- (C) un thread qui demande à entrer en section critique obtiendra toujours d'y rentrer au bout d'un temps fini (c'est une propriété d'*équité* qui permet d'éviter la *famine* d'un ou plusieurs processus).

La première idée qui vienne à l'esprit est de rajouter aux threads considérés un champ :

```
public class CS1 extends Thread {
    Thread tour = null;
    ...
}
```

qui précise quel thread doit s'exécuter. On veut écrire une méthode :

```
public void AttendtonTour()
```

qui attend l'autorisation de s'exécuter, et

```
public void RendlaMain()
```

```
public class CS1 extends Thread {
    volatile Thread tour = null;

    public void AttendtonTour() {
        while (tour != Thread.currentThread()) {
            if (tour == null)
                tour = Thread.currentThread();
            try {
                Thread.sleep(100);
            } catch (Exception e) {}
        }
    }

    public void RendlaMain() {
        if (tour == Thread.currentThread())
            tour = null;
    }

    public void run() {
        while(true) {
            AttendtonTour();
            System.out.println("C'est le tour de "+
                   Thread.currentThread().getName());
            RendlaMain();
        } }

    public static void main(String[] args) {
        Thread Un = new CS1();
        Thread Deux = new CS1();
        Un.setName("UN");
        Deux.setName("DEUX");
        Un.start();
        Deux.start();
    } }
```

FIG. 6.1 – Une tentative d'algorithme d'exclusion mutuelle.

qui autorise les autres threads présents à essayer de s'exécuter.

Pour simuler l'algorithme, on fait en sorte que tous les threads instances de `CS1` aient la même exécution :

```
public void run() {
    while(true) {
        AttendtonTour();
        System.out.println("C'est le tour de "+
                   Thread.currentThread().getName());
        RendlaMain();
    }
}
```

On en arrive au code naturel de la figure 6.1.

Mais cela contredit (A) par exemple. Il suffit de considérer une exécution synchrone des threads et on s'aperçoit que les deux processus peuvent rentrer dans leur section critique en même temps !

```
public class Algorithme1 extends ExclusionMutuelle
{
    public Algorithme1() {
        turn = 0;
    }

    public void Pmutex(int t) {
        while (turn != t)
            Thread.yield();
    }

    public void Vmutex(int t) {
        turn = 1-t;
    }

    private volatile int turn;
}
```

FIG. 6.2 – Une autre tentative d'algorithme d'exclusion mutuelle.

6.2 Premiers algorithmes ?

Continuons sur l'idée de la dernière section, et essayons de programmer une première approximation de code permettant d'assurer l'exclusion mutuelle. Intéressons-nous d'abord à un premier cas dans lequel on a seulement deux processus P_0 et P_1. L'idée est d'assurer que l'on ne puisse jamais être en même temps dans certaine partie du code (appelée section critique) pour P_0 et P_1.

Le premier code auquel on puisse penser pour P_i $(i = 0, 1)$ est montré à la figure 6.2.

Remarquer que l'entier `turn` est déclaré en `volatile` c'est-à-dire qu'il est susceptible d'être modifié à tout moment par l'extérieur (un autre thread par exemple). Cela empêche `javac` de le placer dans un registre en cours d'exécution, pour optimiser le code (ce serait en l'occurrence une optimisation fausse dans notre cas).

Ce code est une instance de la classe abstraite `ExclusionMutuelle` de la figure 6.3.

Pour tester cet algorithme, on utilise des tâches très simples, simulant l'entrée et la sortie d'une section critique, voir figure 6.4.

Et enfin on utilise un `main` qui crée et lance deux tâches, voir figure 6.5.

Mais avec `Algorithme1`, les processus ne peuvent entrer en section critique qu'à tour de rôle, ce qui contredit (B) (mais il est vrai que cet algorithme satisfait à (A) et (C), si on suppose que chaque section critique se déroule en temps fini).

En fait, on peut prouver (voir [Lyn96]) que pour résoudre le problème de l'exclusion mutuelle entre n processus dans notre cadre, il faut au moins n variables partagées distinctes, donc il est clair qu'il faut un peu compliquer le code précédent ($n = 2$, mais seulement une variable partagée, `turn` !).

Pour résoudre la difficulté précédente, il faut s'arranger pour connaître l'état de chaque processus afin de prendre une décision. Un essai de solution serait le code de la figure 6.6.

Si on remplace `INIT` par `false` on s'aperçoit que la condition (A) d'exclusion mutuelle n'est pas satisfaite !

Pour s'en convaincre il suffit de considérer l'exécution suivante (les deux premières colonnes représentent l'exécution du processeur 0 et du processeur 1 respectivement, les deux dernières colonnes donnent les valeurs prises par le tableau `flag`) :

```
public abstract class ExclusionMutuelle
{
    public static void Critique() {
        try {
            Thread.sleep((int) (Math.random()*3000));
        }
        catch (InterruptedException e) { }
    }

    public static void nonCritique() {
        try {
            Thread.sleep((int) (Math.random()*3000));
        }
        catch (InterruptedException e) { }
    }

    public abstract void Pmutex(int t);
    public abstract void Vmutex(int t);
}
```

FIG. 6.3 – Simulation des sections critiques et non-critiques.

```
public class Tache extends Thread
{
    public Tache(String n,int i,ExclusionMutuelle s) {
        name = n;
        id = i;
        section = s;
    }

    public void run() {
        while (true) {
            section.Pmutex(id);
            System.out.println(name+" est en section critique");
            ExclusionMutuelle.Critique();
            section.Vmutex(id);

            System.out.println(name+" est sorti de la section critique");
            ExclusionMutuelle.nonCritique();
        }
    }

    private String name;
    private int id;
    private ExclusionMutuelle section;
}
```

FIG. 6.4 – Thread appelant les algorithmes d'exclusion mutuelle.

```
public class Test
{
    public static void main(String args[]) {
        ExclusionMutuelle alg = new Algorithme1();

        Tache zero = new Tache("Tache 0",0,alg);
        Tache un = new Tache("Tache 1",1,alg);

        zero.start();
        un.start();
    }
}
```

FIG. 6.5 – Lancement de deux tâches en parallèle.

```
public class Algorithme2 extends ExclusionMutuelle
{
    public Algorithme2() {
        flag[0] = false;
        flag[1] = false;
    }

    public void Pmutex(int t) {
        int other;
        other = 1-t;
        flag[t] = INIT;
        while (flag[other] == true)
            Thread.yield();
    }

    public void Vmutex(int t) {
        flag[t] = false;
    }

    private volatile boolean[] flag = new boolean[2];
}
```

FIG. 6.6 – Deuxième tentative d'implémentation d'un algorithme d'exclusion mutuelle.

```
public class Algorithme4 extends ExclusionMutuelle
{
    public Algorithme4() {
        flag[0] = false;
        flag[1] = false;
    }

    public void Pmutex(int t) {
        int other;
        other = 1-t;
        flag[t] = true;
        while (flag[other] == true) {
            flag[t] = false;
            while (flag[other])
                Thread.yield();
            flag[t] = true;
    }

    public void Vmutex(int t) {
        flag[t] = false;
    }

    private volatile boolean[] flag = new boolean[2];
}
```

FIG. 6.7 – Autre tentative d'algorithme d'exclusion mutuelle.

`zero`	`un`	flag[0]	flag[1]
`flag[1]=false` ? : OUI	`flag[0]=false` ? : OUI	false	false
`flag[0] := true`	`flag[1] :=true`	true	true
`Section Critique`	`Section Critique`	-	-

Si d'autre part, on fait `INIT=true`, la même exécution (synchrone) fait que les deux processus bouclent indéfiniment, contredisant (B) et (C) !

On propose alors le code de la figure 6.7, toujours plus compliqué...

Il réalise bien l'exclusion mutuelle mais peut causer un interblocage si les deux processus s'exécutent de façon purement synchrone. A ce moment là, après la première affectation, les deux tests de la boucle `while` sont vrais, d'où les deux `flag` sont mis à `false` *simultanément* puis à `true` et ainsi de suite. Les programmes de `zero` et de `un` bouclent avant la portion `Section Critique`.

Tout cela paraît sans issue. En fait, une solution est d'instaurer une règle de *politesse* entre les processeurs. C'est l'algorithme de Dekker (1965), à la figure 6.8.

6.3 Algorithme de Dekker

Il réalise l'exclusion mutuelle sans blocage mutuel. L'équité (la condition (C)) est vérifiée si l'ordonnanceur de tâche est lui-même équitable, ce que l'on supposera.

Considérons le code plus simple de la figure 6.9, proposé par Hyman en 1966.

Il est malheureusement faux car, si `turn` est à 0 et `un` positionne `flag[1]` à `true` puis trouve `flag[0]` à `false`, alors `zero` met `flag[0]` à `true`, trouve `turn` égal à 0 et rentre en section critique. `un` affecte alors 1 à `turn` et rentre également en section critique !

Une vraie amélioration de l'algorithme de Dekker est l'algorithme de Peterson proposé en 1981.

```
public class Dekker extends ExclusionMutuelle
{
    public Dekker() {
        flag[0] = false;
        flag[1] = false;
        turn = 0;
    }

    public void Pmutex(int t) {
        int other;
        other = 1-t;
        flag[t] = true;

        while (flag[other] == true) {
            if (turn == other) {
                flag[t] = false;
                while (turn == other)
                    Thread.yield();
                flag[t] = true;
            }
        }
    }

    public void Vmutex(int t) {
        turn = 1-t;
        flag[t] = false;
    }

    private volatile int turn;
    private volatile boolean[] flag = new boolean[2];
}
```

FIG. 6.8 – Algorithme de Dekker.

```
public class Hyman extends ExclusionMutuelle
{
    public Hyman() {
        flag[0] = false;
        flag[1] = false;
        turn = 0;
    }

    public void Pmutex(int t) {
        int other = 1-t;
        flag[t]= true;

        while (turn==other) {
            while (flag[other])
                Thread.yield();
            turn = t;
        }
    }

    public void Vmutex(int t) {
        flag[t] = false;
    }

    private volatile int turn;
    private volatile boolean[] flag = new boolean[2];
}
```

FIG. 6.9 – Algorithme faux d'Hyman.

```
public class Peterson extends ExclusionMutuelle
{
    public Peterson() {
        flag[0] = false;
        flag[1] = false;
        turn = 0;
    }

    public void Pmutex(int t) {
        int other;
        other = 1-t;
        flag[t] = true;
        turn = t;
        while (flag[other] && (turn == t))
            Thread.yield();
    }

    public void Vmutex(int t) {
        flag[t] = false;
    }

    private volatile int turn;
    private volatile boolean[] flag = new boolean[2];
}
```

FIG. 6.10 – Algorithme de Peterson.

6.4 Algorithme de Peterson

Contentons nous d'abord du cas simple où l'on dispose uniquement de deux tâches `zero` et `un`. Le code des deux tâches est donné à la figure 6.10.

On a bien alors exclusion mutuelle sans interblocage et avec équité (pas de famine).

Donnons ici quelques idées de preuve de cet algorithme.

On va décorer le code par des "assertions" écrites avec des prédicats logiques du premier ordre, portant sur les valeurs des variables du programme (et donc également de celles que l'on vient d'introduire), avec comme prédicats l'égalité avec des constantes (cela nous suffira ici). Ces assertions seront introduites entre deux instructions consécutives, c'est-à-dire qu'elles seront associées à chaque point de contrôle de chaque processus.

On va introduire, de façon intuitive et pas trop formelle, une méthode de raisonnement et de preuve sur des processus parallèles (disons, en nombre n) en mémoire partagée due à l'origine à S. Owicki et D. Gries [OG75].

Les assertions que l'on rajoute doivent être des "invariants" décrivant des relations logiques entre les valeurs des variables, vraies pour toutes les exécutions possibles (en particulier tous les ordonnancements des actions atomiques). Cela veut dire la chose suivante. Soit T le système de transition donnant la sémantique du programme considéré. On sait qu'un état de T est un (n+1)-uplet $(c_1, \ldots, c_n, E)$ où c_i $(1 \leq i \leq n)$ est un point de contrôle du $i$ème processus et E est un environnement, c'est-à-dire une fonction qui à chaque variable du programme associe une valeur. Alors le système d'assertion A qui à chaque point de contrôle c (de n'importe quel processus i) associe un prédicat P est admissible si P est vrai pour l'environnement E quel que soit l'état $(c_1, \ldots, c_n, E)$ du système de transition tel que $c_i = c$.

L'idée est que l'on veut pouvoir inférer quand c'est possible, ou tout du moins vérifier que les assertions que l'on rajoute dans le code de chacun des processus disent bien des choses vraies sur

toutes les exécutions possibles du code.

Soit I une instruction ou un bloc d'instructions JAVA. On rajoute des assertions décrivant ce qui se passe avant et après le code I en écrivant $\{p\}I\{q\}$. On a les règles suivantes, pour un fragment de JAVA, qui va nous suffire pour le moment :

–
$$\{p[x \leftarrow u]\}x = u\{p\}$$

–
$$\{p_1\}\,(if\ B\ then\ \{p_2\}I_1\{q_2\}\ else\{p_3\}I_2\{q_3\})\,\{q_1\}$$

si on a,
$$p_1 \wedge B \Rightarrow p_2$$
$$p_1 \wedge \neg B \Rightarrow p_3$$
$$\{p_2\}I_1\{q_2\}$$
$$\{p_3\}I_2\{q_3\}$$
$$q_2 \Rightarrow q_1$$
$$q_3 \Rightarrow q_1$$

–
$$\{p_1\}while B\,\{\{p_2\}C\{q_2\}\}\,\{q_1\}$$

si on a,
$$p_1 \wedge B \Rightarrow p_2$$
$$p_1 \wedge \neg B \Rightarrow q_1$$
$$\{p_2\}C\{q_2\}$$
$$q_2 \wedge B \Rightarrow p_2$$
$$q_2 \wedge \neg B \Rightarrow q_1$$

Celles-ci découlent de la sémantique des processus de la section 5.4.2 par une simple abstraction (voir [Cou90] en particulier). Par exemple (voir [Win93]), le système suivant est un système d'assertions correctes :

```
{ x=x0 et y=y0 }
q = 0;
while (x >= y) {
  {x=x0-qy0 et y=y0}
  q = q+1;
  {x=x0-(q-1)y0 et y=y0}
  x = x-y;
  {x=x0-qy0 et y=y0}
}
{x=x0-qy0 et x<y et y=y0}
```

Une fois la preuve faite séquentiellement, il faut prouver que les invariants trouvés pour chaque thread pris séparément, sont encore valides si tout ou partie d'autres threads s'exécutent entre deux instructions, modifiant ainsi l'état local du thread ! Cela s'appelle la preuve de non-interférence. Attention car on suppose ici que les affectations sont atomiques (ce sera vrai en JAVA dans la suite pour les affectations de constantes, ce qui sera le seul cas intéressant pour nous ; sinon il faudrait décomposer les affectations en *load*, *store* etc. comme expliqué précédemment).

Pour que cela puisse se faire de façon correcte, il faut introduire des variables nouvelles dans le code séquentiel, qui déterminent le point de contrôle auquel le processus est arrivé. Sans cela, la méthode est fausse (en fait, l'article d'origine de S. Owicki et de D. Gries comportait cet oubli). Par exemple, on devrait transformer la preuve précédente en :

```
{ x=x0 et y=y0 et c=0}
q = 0;
{ x=x0 et y=y0 et c=1}
```

```
{ non flag[0] }
flag[0]=true; after[0]=false;
{ flag[0] et non after[0] }
turn=0; after[0]=true;
{ inv: flag[0] et after[0] et I }
while (flag[1] && (turn==0))
   { flag[0] et after[0] et I }
   Thread.yield();
{ flag[0] et after[0] et (flag[1] et (non(after[1]) ou turn=1)) }
[ Section Critique CS1]
{ flag[0] }
flag[0]=false;
```

FIG. 6.11 – Assertions pour la preuve de l'algorithme de Peterson.

```
while (x >= y) {
  {x=x0-qy0 et y=y0 et c=2}
  q = q+1;
  {x=x0-(q-1)y0 et y=y0 et c=3}
  x = x-y;
  {x=x0-qy0 et y=y0 et c=4}
}
{x=x0-qy0 et x<y et y=y0 et c=5}
```

`c` représente le point de contrôle courant, numéroté de façon fort logique de 1 à 5 ici.

On va donc supposer que chaque thread P_i parmi $P_1, \ldots, P_k$ a un compteur `ci` et des assertions $A_{i,k}$ avant les instructions $I_{i,k}$ de P_i (pour k variant sur l'ensemble des points de contrôle de P_i) utilisant éventuellement des prédicats aussi sur les autres compteurs ordinaux `c1`,...,`ck`. Alors il faut vérifier les conditions dites de non-interférences suivantes, quand $I_{j,l}$ est une affectation `x=u` :

$$\{(A_{i,k} \wedge A_{j,l})[x \leftarrow u]\} I_{j,l} \{A_{i,k}\}$$

On peut simplifier un peu cela dans le cas qui nous préoccupe, car on n'a qu'une affectation sur un objet partagé, donc on n'a pas besoin de numéroter toutes les instructions. Introduisons deux variables auxiliaires `after[0]` et `after[1]` (qui servent à indiquer si le contrôle est après `turn=t` dans le code). Rajoutons également les instructions `after[0]=true`, `after[1]=true` après respectivement `turn=0` et `turn=1`.

En utilisant l'abbréviation `I= [turn=1 ou turn=2]` on commente le code avec les assertions comme à la figure 6.11.

De même pour le deuxième processus, à la figure 6.12.

Il est relativement aisé de se convaincre que ces assertions forment bien un schéma de preuve correct de chacun des processus pris séquentiellement. Seule subsiste la preuve de non-interférence. En fait, seul,

```
pre(CS1) = flag[0] et after[0] et (flag[1] et (non(after[1])
                                        ou (turn=1)))
```

contient des références à des objets manipulés par l'autre processus, et ce, seulement en les lignes

```
flag[1]=true; after[1]=false;
```

et

```
turn=1; after[1]=true;
```

```
{ non flag[1] }
flag[1]=true; after[1]=false;
{ flag[1] et non after[1] }
turn=1; after[1]=true;
{ inv: flag[1] et after[1] et I }
while (flag[0] && (turn==0)) do
   { flag[1] et after[1] et I }
   Thread.yield();
{ flag[1] et after[1] et (flag[0] et (non(after[0]) ou turn=0)) }
[ Section Critique CS2]
{ flag[1] }
flag[1]=false;
```

FIG. 6.12 – Assertions pour la preuve de l'algorithme de Peterson.

Or,

```
{ pre(CS1) } flag[1]=true; after[1]=false; { pre(CS1) }
```

et

```
{ pre(CS1) } turn=1; after[1]=true; { pre(CS1) }
```

et de même par symétrie. De plus, on peut voir que

```
pre(CS1) et pre(CS2) implique (turn=0 et turn=1)
```

Ce qui implique que l'on a toujours

```
non(pre(CS1) et pre(CS2))
```

prouvant ainsi l'exclusion mutuelle.

Remarquez qu'il existe une généralisation de l'algorithme de Peterson à n processeurs. C'est le programme de la figure 6.13, codé sur chacun des n processeurs ($liste[0]$ à $liste[nproc-1]$).

Il faut évidemment légèrement changer le programme de test (ici pour 5 tâches), voir figure 6.14.

En fait c'est la solution pour 2 processeurs itérée $n-1$ fois. `flag[i]`$=-1$ signifie que $liste[i]$ ne s'engage pas en section critique. `turn` permet de gérer les conflits dans un couple de processus. Cet algorithme réalise bien l'exclusion mutuelle sans interblocage et avec équité.

Dans les améliorations possibles, il y a en particulier l'algorithme de Burns (1981). C'est une solution entièrement symétrique qui minimise le nombre de variables utilisées ainsi que les valeurs qu'elles peuvent prendre en cours de programme.

```
public class PetersonN extends ExclusionMutuelle
{
    public PetersonN(int nb) {
        int i;
        nproc = nb;
        turn = new int[nproc-1];
        flag = new int[nproc];
        for (i=0; i < nproc; i++) {
            flag[i] = -1; }
    }

    public void Pmutex(int t) {
        int j, k;
        boolean cond;
        for (j=0; j < nproc-1; j++) {
            flag[t] = j;
            turn[j] = t;
            cond = true;
            for (k=0; (k < nproc) && (k != t); k++)
                cond = cond || (flag[k] >= j);
            while (cond && (turn[j] == t))
                Thread.yield();
        }
    }

    public void Vmutex(int t) {
        flag[t] = -1;
    }

    private volatile int[] turn;
    private int nproc;
    private volatile int[] flag;
}
```

FIG. 6.13 – Algorithme de Peterson pour plus de deux tâches.

```
public class TestN
{
    public final static int nb = 5;

    public static void main(String args[]) {
        int i;
        Tache[] liste;

        liste = new Tache[nb];
        ExclusionMutuelle alg = new PetersonN(nb);

        for (i=0; i < nb; i++) {
            liste[i] = new Tache("Tache "+i,i,alg);
            liste[i].start();
        }
    }
}
```

FIG. 6.14 – Classe pour tester des algorithmes d'exclusion mutuelle pour plus de deux processus.

Chapitre 7

Problèmes d'ordonnancement

7.1 Introduction

Revenons à la mémoire partagée... et aux PRAM ! Le problème important qui va nous préoccuper dans ce chapitre est de paralléliser ce qui a priori prend le plus de temps dans un programme : les nids de boucle. Nous n'irons pas jusqu'à traiter la façon dont un compilateur va effectivement paralléliser le code, mais on va au moins donner un sens à ce qui est intrinsèquement séquentiel, et à ce qui peut être calculé en parallèle.

Avant de commencer, expliquons en quoi ceci est primordial, pour l'efficacité d'un programme parallèle. Supposons qu'après parallélisation, il reste une proportion de s ($0 < s \leq 1$) de notre code qui soit séquentiel, et qu'il s'exécute sur p processeurs. Alors l'accélération du calcul complet par rapport à un calcul séquentiel sera au maximum de,

$$\frac{1}{s + \frac{1-s}{p}}$$

(maximum de $\frac{1}{s}$ pour s fixé) ; c'est la loi d'Amdahl.

Conséquence : si on parallélise 80 pour cent d'un code (le reste étant séquentiel), on ne pourra jamais dépasser, quelle que soit la machine cible, une accélération d'un facteur 5 !

7.2 Nids de boucles

Un nid de boucles est une portion de code dans laquelle on trouve un certain nombre de boucles imbriquées. Le cas le plus simple de nid de boucles est le nid de boucles *parfait*, qui a la propriété que les corps de boucle sont inclus dans exactement les mêmes boucles.

Par exemple, le code plus bas est un nid de boucles :

```
for (i=1;i<=N;i++) {
  for (j=i;j<=N+1;j++)
    for (k=j-i;k<=N;k++) {
      S1;
      S2;
    }
  for (r=1;r<=N;r++)
    S3;
}
```

Par contre, ceci n'est pas un nid de boucles *parfait* : `S1` et `S2` sont englobées par les boucles `i`, `j` et `k` alors que `S3` est englobée par les boucles `i` et `r`.

Dans le cas de nids de boucles parfaits, on peut définir aisément l'instance des instructions du corps de boucle, qui est exécutée à un moment donné. Ceci se fait à travers la notion de *vecteurs d'itération*. Ceux-ci sont des vecteurs de dimension n (n étant le nombre de boucles imbriquées), dont les composantes décrivent les valeurs des indices pour chacune des boucles. Pour les nids de boucles non-parfaits, les domaines d'itérations sont incomparables a priori. Il suffit de "compléter" les vecteurs d'itération de façon cohérente : $I \rightarrow \tilde{I}$

Par exemple, pour `S3` on a un vecteur d'itération en (i, r) dont le domaine est $1 \leq i, r \leq N$. Pour `S1` on a un vecteur d'itération en (i, j, k) dont le domaine est $1 \leq i \leq N$, $i \leq j \leq N+1$ et $j - i \leq k \leq N$. On note une instance de S à l'itération I, $S(I)$. On supposera dans la suite de ce chapitre que les domaines d'itération forment des polyèdres (conjonction d'inégalités linéaires).

On définit également l'*ordre séquentiel d'exécution* qui décrit l'ordre d'exécution "par défaut". Ceci se définit de façon triviale, comme un ordre $<_{seq}$ entre les instructions, quand on n'a pas de boucles. C'est l'ordre textuel $<_{text}$. En présence de boucle, on utilise en plus la notion de vecteur d'itération : une instance d'une instruction T au vecteur d'itération I, $T(I)$, sera exécutée avant son instance au vecteur d'itération J, c'est à dire $T(I) <_{seq} T(J)$ si $I <_{lex} J$ où est $<_{lex}$ est l'ordre lexicographique. De façon plus générale, on définit :

$$\begin{array}{ll} S(I) <_{seq} T(J) & \Leftrightarrow \\ & (\tilde{I} <_{seq} \tilde{J}) \text{ ou} \\ & (\tilde{I} = \tilde{J} \text{ et } S <_{text} T) \end{array}$$

A partir de là, on veut mettre en parallèle certaines instructions : une partie de l'ordre séquentiel que l'on vient de définir est à respecter absolument, une autre pas (permutation possible d'actions). On va définir un ordre partiel (dit de Bernstein), qui est l'ordre minimal à respecter pour produire un code sémantiquement équivalent à l'ordre initial. En fait, l'ordre séquentiel va être une *extension* de l'ordre partiel de Bernstein. Cet ordre partiel est défini à partir de 3 types de dépendances de données : flot, anti et sortie.

7.3 Dépendance des données

7.3.1 Définitions

On va en définir de trois sortes : *flot, anti et sortie,* toujours dirigées par l'ordre séquentiel. C'est à dire que si $S(I) <_{seq} T(J)$, on a une :

- Dépendance de *flot* de $S(I)$ vers $T(J)$: si un emplacement mémoire commun est en écriture pour $S(I)$ et en lecture pour $T(J)$
- Dépendance *anti* de $S(I)$ vers $T(J)$: si un emplacement mémoire commun est en lecture pour $S(I)$ et en écriture pour $T(J)$
- Dépendance de *sortie* de $S(I)$ vers $T(J)$: si un emplacement mémoire commun est en écriture pour $S(I)$ et en écriture pour $T(J)$

Prenons l'exemple du programme suivant :

```
for (i=1;i<=N;i++)
  for (j=1;j<=N;j++)
    a(i+j) = a(i+j-1)+1;
```

Son graphe de dépendances, est donné à la figure 7.1. Les dépendances de flot sont représentées par les flèches pleines. Les dépendances anti et de sortie sont représentées par des flèches à traits pointillés.

7.3.2 Calcul des dépendances

Supposons que $S(I)$ et $T(J)$ accèdent au même tableau a (S en écriture, T en lecture par exemple, pour la dépendance de flot) $S(I) : a(f(I)) = ...$ et $T(J) : ... = a(g(J))$; l'accès au tableau

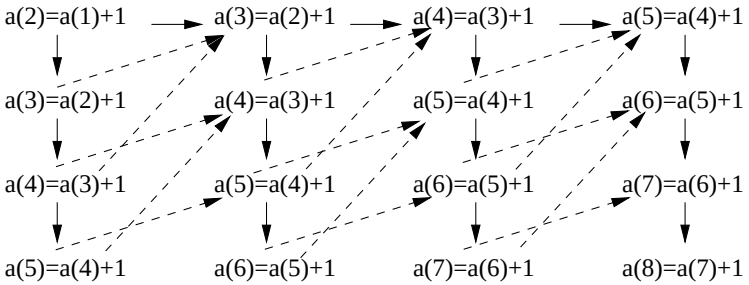


FIG. 7.1 – Dépendances flot, anti et de sortie.

est commun si $f(I) = g(J)$. Si f et g sont des fonctions affines à coefficients entiers cela peut se tester algorithmiquement en temps polynomial.

Chercher une dépendance de flot par exemple, revient à prouver en plus $S(I) <_{seq} T(J)$. Encore une fois, cela se fait en général par la résolution de systèmes d'égalités et d'inégalités affines. Chercher les dépendances *directes* (c'est-à-dire celles qui engendrent par transitivité toutes les dépendances) est bien plus compliqué. Cela peut se faire par programmation linéaire, par des techniques d'optimisation dans les entiers etc.

Nous n'allons pas dans ce chapitre décrire ces algorithmes. Nous nous contenterons de montrer quelques exemples.

Prenons $f(I) = i + j$ et $g(J) = i + j - 1$ (ce sont les fonctions d'accès au tableau `a` dans l'exemple plus haut). On cherche les dépendances entre l'écriture $S(i', j')$ et la lecture $T(i, j)$:

- $f(I) = g(J) \Leftrightarrow i' + j' = i + j - 1$
- $S(i', j') <_{seq} S(i, j) \Leftrightarrow ((i' \leq i - 1)$ ou $(i = i'$ et $j' \leq j - 1))$

Pour déterminer une dépendance de flot directe, on doit résoudre :

$$max_{<_{seq}}\{(i', j') \mid (i', j') <_{seq} (i, j), i' + j' = i + j - 1, 1 \leq i, i', j, j' \leq N\}$$

La solution est :

$$\begin{array}{ll} (i, j-1) & \text{si } j \geq 2 \\ (i-1, j) & \text{si } j = 1 \end{array}$$

Pour déterminer une antidépendance directe de $S(i, j)$ vers $S(i', j')$, on doit résoudre :

$$min_{<_{seq}}\{(i', j') \mid (i, j) <_{seq} (i', j'), i' + j' = i + j - 1, 1 \leq i, i', j, j' \leq N\}$$

La solution (pour $j \geq 3$, $i \leq N - 1$) est :

$$(i + 1, j - 2)$$

7.3.3 Approximation des dépendances

Les dépendances sont en général bien trop ardues à déterminer exactement. On s'autorise donc à n'obtenir que des informations imprécises, mais correctes. L'une d'elles est le *Graphe de Dépendance Etendu* (ou GDE) :

- Sommets : instances $S_i(I)$, $1 \leq i \leq s$ et $I \in D_{S_i}$
- Arcs : $S(I) \rightarrow T(J)$ pour chaque dépendance

On appelle ensemble des paires de dépendances entre S et T l'ensemble suivant :

$$\{(I, J) \mid S(I) \rightarrow T(J)\} \subseteq \mathbb{Z}^{n_S} \times \mathbb{Z}^{n_T}$$

L'ensemble de distance de ces dépendances est :

$$\{(\tilde{J} - \tilde{I}) \mid S(I) \rightarrow T(J)\} \subseteq \mathbb{Z}^{n_{S,T}}$$

Dans le cas de l'exemple de la section 7.3.1, on a des paires :

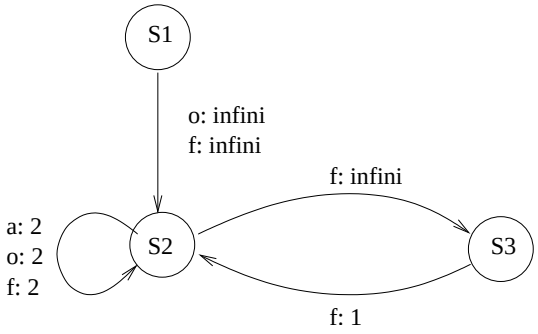


FIG. 7.2 – GDRN

- lecture $a(i+j-1)$-écriture $a(i+j)$: ensemble de distance $\{(1,-2)\}$
- écriture $a(i+j)$-lecture $a(i+j-1)$: ensemble de distance $\{(1,0),(0,1)\}$
- écriture $a(i+j)$-écriture $a(i+j)$: ensemble de distance $\{(1,-1)\}$

Il reste un problème de taille : on ne peut pas calculer le GDE à la compilation ! (de toutes façons, il est encore bien trop gros)

On doit donc abstraire encore un peu plus. On peut définir le *Graphe de Dépendance Réduit* ou GDR :

- Sommets : instructions S_i $(1 \leq i \leq s)$
- Arcs : $e : S \rightarrow T$ si il existe au moins un arc $S(I) \rightarrow T(J)$ dans le GDE
- Etiquette : $w(e)$ décrivant un sous-ensemble D_e de $\mathbb{Z}^{n_{S,T}}$

Le tri topologique du GDR permet d'avoir une idée des portions séquentielles, et des portions parallélisables. On peut encore abstraire ce GDR en étiquetant ses arcs. Par exemple, on peut utiliser des niveaux de dépendance, que l'on définit plus bas, et on obtiendra le *Graphe de Dépendance Réduit à Niveaux* (GDRN).

On dit qu'une dépendance entre $S(I)$ et $T(J)$ est boucle indépendante si elle a lieu au cours d'une même itération des boucles englobant S et T ; sinon on dit qu'elle est portée par la boucle. On étiquette en conséquence les arcs $e : S \rightarrow T$ du GDR, par la fonction d'étiquetage l :

- $l(e) = \infty$ si $S(I) \rightarrow T(J)$ avec $\tilde{J} - \tilde{I} = 0$
- $l(e) \in [1, n_{S,T}]$ si $S(I) \rightarrow T(J)$, et la première composante non nulle de $\tilde{J} - \tilde{I}$ est la $l(e)^{ieme}$ composante

Prenons un exemple :

```
for (i=2;i<=N;i++) {
  S1: s(i) = 0;
  for (j=1;j<i-1;j++)
    S2: s(i) = s(i)+a(j,i)*b(j);
S3:  b(i) = b(i)-s(i);
}
```

Le GDRN est représenté à la figure 7.2 (où a signifie dépendance anti, o de sortie et f de flot).

Les vecteurs de direction sont une autre abstraction, en particulier de ces ensembles de distance :

- on note $z+$ pour une composante si toutes les distances sur cette composante ont au moins la valeur z
- on note $z-$ pour une composante si toutes les distances sur cette composante ont au plus la valeur z
- on note $+$ à la place de $1+$, $-$ à la place de $-1-$
- on note $*$ si la composante peut prendre n'importe quelle valeur
- on note z si la composante a toujours la valeur z

On obtient comme GDRV celui de la figure 7.3

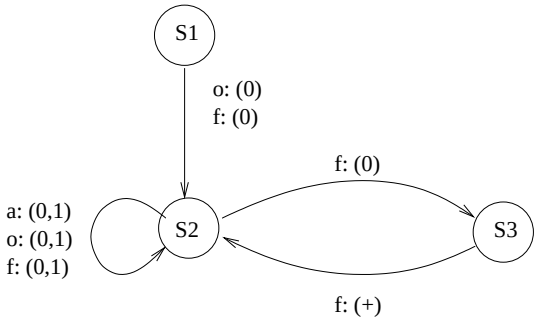


FIG. 7.3 – GRDV

7.4 Transformations de boucles

C'est là ce qui permet effectivement de paralléliser, à partir d'une connaissance minimale des dépendances : certaines dépendances autorisent à transformer localement le code, qui est à son tour bien plus parallélisable. Il existe deux types d'algorithmes bien connus :

- Allen et Kennedy (basé sur le GDRN) : effectue des distributions de boucles
- Lamport : transformations unimodulaires (basé sur le GDRV), c'est à dire, torsion, inversion et permutation de boucles

On décrira un peu plus loin l'algorithme d'Allen et Kennedy. Pour celui de Lamport, on reportera le lecteur à [RL03]. Avant d'expliquer comment on extrait d'un graphe de dépendance l'information nécessaire à la parallélisation, on commence par expliquer quelles sont les grands types de transformation (syntaxique) de code. Cela nous permettra de paralléliser un petit code, à la main, sans recourir à un algorithme de parallélisation automatique.

7.4.1 Distribution de boucles

Toute instance d'une instruction S peut être exécutée avant toute instance de T si on n'a jamais $T(J) \rightarrow S(I)$ dans le GDE.

Plusieurs cas sont à considérer, pour le code :

```
for (i=...) {
  S1;
  S2;
}
```

Cas 1 : $S1 \rightarrow S2$ mais on n'a pas de dépendance de $S2$ vers $S1$, alors on peut transformer le code en :

```
for (i=...)
  S1;
for (i=...)
  S2;
```

Cas 2 : $S2 \rightarrow S1$ mais on n'a pas de dépendance de $S1$ vers $S2$, alors on peut transformer le code en :

```
for (i=...)
  S2;
for (i=...)
  S1;
```

7.4.2 Fusion de boucles

On transforme (ce qui est toujours possible) :

```
forall (i=1;i<=N;i++)
 D[i]=E[i]+F[i];
forall (j=1;j<=N;j++)
 E[j]=D[j]*F[j];
```

en :

```
forall (i=1;i<=N;i++)
 {
  D[i]=E[i]+F[i];
  E[i]=D[i]*F[i];
 }
```

Cela permet une vectorisation et donc une réduction du coût des boucles parallèles, sur certaines architectures.

7.4.3 Composition de boucles

De même, on peut toujours transformer :

```
forall (j=1;j<=N;j++)
 forall (k=1;k<=N;k++)
  ...
```

en :

```
forall (i=1;i<=N*N;i++)
 ...
```

Cela permet de changer l'espace d'itérations (afin d'effectuer éventuellement d'autres transformations).

7.4.4 Echange de boucles

Typiquement, on transforme :

```
for (i=1;i<=N;i++)
 for (j=2;j<=M;j++)
  A[i,j]=A[i,j-1]+1;
```

en la boucle avec affectation parallèle :

```
for (j=2;j<=M;j++)
 A[1:N,j]=A[1:N,j-1]+1;
```

Ce n'est évidemment possible que dans certains cas.

7.4.5 Déroulement de boucle

Typiquement, on transforme :

```
for (i=1;i<=100;i++)
 A[i]=B[i+2]*C[i-1];
```

en :

```
for (i=1;i<=99;i=i+2)
 {
  A[i]=B[i+2]*C[i-1];
  A[i+1]=B[i+3]*C[i];
 }
```

7.4.6 Rotation de boucle [skewing]

C'est le pendant du changement de base dans l'espace des vecteurs d'itération. Typiquement :

```
for (i=1;i<=N;i++)
 for (j=1;j<=N;j++)
  a[i,j]=(a[i-1,j]+a[i,j-1])/2;
```

Il y a un front d'onde, et on peut le transformer en :

```
for (k=2;k<=N;k++)
  forall (l=2-k;l<=k-2;l+=2)
    a[(k-l)/2][(k+l)/2] = a[(k-l)/2-1][(k+l)/2]+a[(k-l)/2][(k+l)/2-1];
for (k=1;k<=N;k++)
  forall (l=k-N;l<=N-k;l+=2)
    a[(k-l)/2][(k+l)/2] = a[(k-l)/2-1][(k+l)/2]+a[(k-l)/2][(k+l)/2-1];
```

7.4.7 Exemple de parallélisation de code

On considère la phase de *remontée* après une décomposition LU d'une matrice.

Soit donc à résoudre le système triangulaire supérieur

$$Ux = b$$

avec,

$$U = \begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & U_{1,3} & \cdots & U_{1,n} \\ 0 & U_{2,2} & U_{2,3} & \cdots & U_{2,n} \\ & & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & U_{n,n} \end{pmatrix}$$

et $U_{i,i} \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

On procède par "remontée" c'est à dire que l'on calcule successivement,

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{b_n}{U_{n,n}} \\ x_i &= \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} U_{i,j} x_j}{U_{i,i}} \end{aligned}$$

pour $i = n-1, n-2, \cdots, 1$.

Le code séquentiel correspondant est :

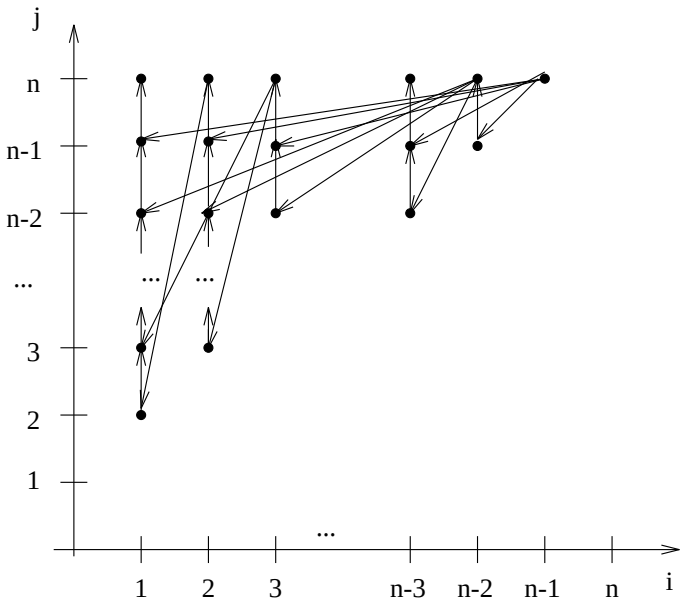


FIG. 7.4 – Graphe de dépendances de la remontée LU

```
x[n]=b[n]/U[n,n];
for (i=n-1;i>=1;i--)
{
x[i]=0;
for (j=i+1;j<=n;j++)
     L: x[i]=x[i]+U[i,j]*x[j];
     x[i]=(b[i]-x[i])/U[i,i];
     }
```

Son graphe de dépendances est donné à la figure 7.4, où on a essentiellement représenté les dépendances de flot. Il est à noter qu'il y a aussi des anti-dépendances des itérations (i, j) vers $(i-1, j)$.

En faisant une rotation et une distribution de boucles on arrive à paralléliser cet algorithme en :

```
H': forall (i=1;i<=n-1;i++)
       x[i]=b[i];
T': x[n]=b[n]/U[n,n];
H:  for (t=1;t<=n-1;t++)
     forall (i=1;i<=n-t;i++)
      L: x[i]=x[i]-x[n-t+1]*U[i],n-t+1];
     T: x[n-t]=x[n-t]/U[n-t,n-t];
```

Le ratio d'accélération est de l'ordre de $\frac{n}{4}$ asymptotiquement.

7.5 Algorithme d'Allen et Kennedy

Le principe est de remplacer certaines boucles `for` par des boucles `forall` et d'utiliser la distribution de boucles pour diminuer le nombre d'instructions dans les boucles, et donc réduire les dépendances. L'algorithme est le suivant :

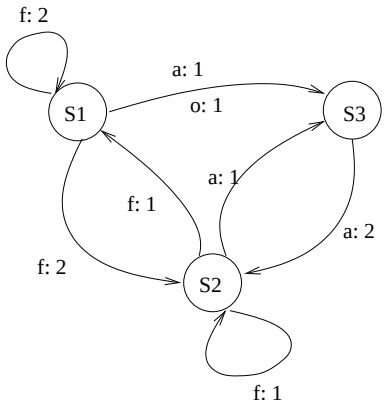


FIG. 7.5 – GDRN

- Commencer avec $k = 1$
- Supprimer dans le GDRN G toutes les arêtes de niveau inférieur à k
- Calculer les composantes fortement connexes (CFC) de G
- Pour tout CFC C dans l'ordre topologique :
  - Si C est réduit à une seule instruction S sans arête, alors générer des boucles parallèles dans toutes les dimensions restantes (i.e. niveaux k à n_S) et générer le code pour S
  - Sinon, $l = l_{min}(C)$, et générer des boucles parallèles du niveau k au niveau $l-1$, et une boucle séquentielle pour le niveau l. Puis reboucler l'algorithme avec C et $k = l+1$

Pour illustrer cet algorithme, on va prendre l'exemple suivant :

```
for (i=1;i<=N;i++)
  for (j=1;j<=N;i++) {
    S1: a(i+1,j+1) = a(i+1,j)+b(i,j+2);
    S2: b(i+1,j) = a(i+1,j-1)+b(i,j-1);
    S3: a(i,j+2) = b(i+1,j+1)-1;
  }
```

On trouve les dépendances suivantes :

- Flot $S1 \rightarrow S1$, variable a, distance $(0, 1)$,
- Flot $S1 \rightarrow S2$, variable a, distance $(0, 2)$,
- Flot $S2 \rightarrow S1$, variable b, distance $(1, -2)$,
- Flot $S2 \rightarrow S2$, variable b, distance $(1, 1)$,
- Anti $S1 \rightarrow S3$, variable a, distance $(1, -2)$,
- Anti $S2 \rightarrow S3$, variable a, distance $(1, -3)$,
- Anti $S3 \rightarrow S2$, variable b, distance $(0, 1)$,
- Sortie $S1 \rightarrow S3$, variable a, distance $(1, -1)$.

Ce qui donne le GDRN de la figure 7.5.

Ce GDRN est fortement connexe et a des dépendances de niveau 1. La boucle sur i sera donc séquentielle. On enlève maintenant les dépendances de niveau 1 pour obtenir le GDRN modifié de la figure 7.6.

La parallélisation finale est ainsi :

```
for (i=1;i<=N;i++) {
  for (j=1;j<=N;j++)
    S1: a(i+1,j+1) = a(i+1,j)+b(i,j+2);
  forall (j=1;j<=N;j++)
    S3: a(i,j+2) = b(i+1,j+1)-1;
  forall (j=1;j<=N;j++)
```

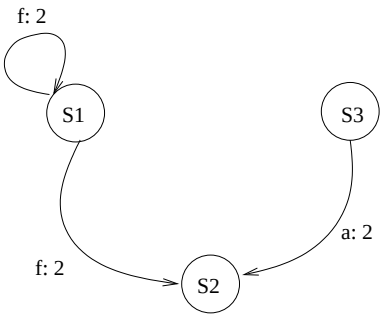


FIG. 7.6 – GDRN

```
    S2: b(i+1,j) = a(i+1,j-1)+b(i,j-1);
}
```

Chapitre 8

Communications et routage

8.1 Généralités

On distingue généralement les topologies statiques où le réseau d'interconnexion est fixe, en anneau, tore 2D, hypercube, graphe complet etc. des topologies dynamiques, modifiées en cours d'exécution (par configuration de *switch*).

Chaque topologie de communication a des caractéristiques spécifiques, qui permettent de discuter de leurs qualités et de leurs défauts. Ces caractéristiques sont, en fonction du nombre de processeurs interconnectés, le degré du graphe d'interconnection, c'est-à-dire le nombre de processeurs interconnectés avec un processeur donné, le diamètre, c'est-à-dire la distance maximale entre deux noeuds, et le nombre total de liens, c'est-à-dire le nombre total de "fils" reliant les différents processeurs. Les topologies de communications avec un petit nombre de liens sont plus économiques mais en général leur diamètre est plus important, c'est-à-dire que le temps de communication entre deux processeurs "éloignés" va être plus important. Enfin, on verra un peu plus loin que le degré est également une mesure importante : cela permet d'avoir plus de choix pour "router" un message transitant par un noeud. On imagine bien également (thème développé au chapitre 11, mais sous un autre point de vue), que si on a une panne au niveau d'un lien, ou d'un processeur, plus le degré est important, plus on pourra trouver un autre chemin pour faire transiter un message. Les caractéristiques de quelques topologies statiques classiques sont résumées dans le tableau ci-dessous :

Topologie	# proc.	d^o	diam.	# liens
Complet	p	$p-1$	1	$\frac{p(p-1)}{2}$
Anneau	p	2	$\lfloor \frac{p}{2} \rfloor$	p
Grille 2D	$\sqrt{(p)}\sqrt{(p)}$	$2,3,4$	$2(\sqrt{(p)}-1)$	$2p-2\sqrt{(p)}$
Tore 2D	$\sqrt{(p)}\sqrt{(p)}$	4	$2\lfloor \frac{\sqrt{(p)}}{2} \rfloor$	$2p$
Hypercube	$p=2^d$	$d=log(p)$	d	$\frac{plog(p)}{2}$

L'intérêt est relatif, pour chaque choix. Par exemple, le réseau complet est idéal pour le temps de communications (toujours unitaire) mais le passage à l'échelle est difficile ! (prix du cablage, comment rajouter des nouveaux processeurs ?). La topologie en anneau n'est pas chère, mais les communications sont lentes, et la tolérance aux pannes des liens est faible. On considère généralement que le tore 2D ou l'hypercube sont de bons compromis entre ces deux architectures.

8.2 Routage

On distingue deux modèles principaux, pour le routage des messages dans un système distribué. Chaque modèle a un calcul de coût de communication distinct.

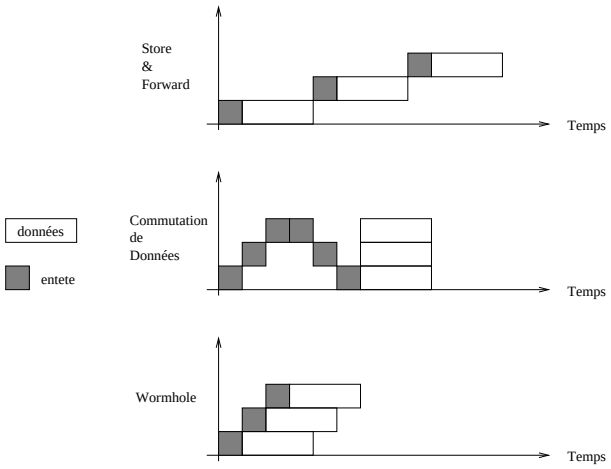


FIG. 8.1 – Comparaison CC, WH et SF

Le premier modèle est le modèle "Store and Forward" (SF) : chaque processeur intermédiaire reçoit et stocke le message M avant de le re-émettre en direction du processeur destinataire. C'est un modèle à commutation de message qui équipait les premières générations de machines. Le coût de communication est de $d(x,y)(\beta + L\tau)$ (où $d(x,y)$ est la distance entre les machines x et y, τ est lié au débit du réseau, β est la latence d'un envoi de message, et L est la longueur du message) sauf programmation particulièrement optimisée (voir section 8.3.5) où on peut atteindre $L\tau + O(\sqrt{(}L))$.

Le modèle "cut-through" (CT) utilise un co-processeur de communication associé à chaque noeud. Le coût de communication est de $\beta + (d(x,y) - 1)\delta + L\tau$ (où δ est encore une fois lié au débit du réseau, τ est la latence). Si $\delta << \beta$, le chemin est calculé par le matériel, la partie logicielle étant dans le facteur β.

Il existe également deux principaux protocoles de routage : "Circuit-switching" (CC - ou "commutation de données") et "Wormhole" (WH).

Le circuit-switching crée le chemin avant l'émission des premiers octets. Le message est ensuite acheminé directement entre source et destinataire. Cela nécessite une immobilisation des liens (cas par exemple de l'iPSC d'INTEL).

Le protocole Wormhole place l'adresse du destinataire dans l'entête du message. Le routage se fait sur chaque processeur et le message est découpé en petits paquets appelés *flits*. En cas de blocage : les *flits* sont stockés dans les registres internes des routeurs intermédiaires (exemple, Paragon d'INTEL).

En général, CC et WH sont plus efficaces que SF. Ils masquent la distance entre les processeurs communiquants. CC contruit son chemin avant l'envoi des premiers paquets de données alors que WH construit sa route tandis que le message avance dans le réseau (meilleure bande passante que CC). Ces points sont résumés à la figure 8.1.

8.3 Algorithmique sur anneau de processeurs

8.3.1 Hypothèses

On étude une architecture dans laquelle (voir figure 8.2 pour une explication graphique) on a p processeurs en anneau, chacun ayant accès à son numéro d'ordre (entre 0 et $p-1$), par `my_num()` et au nombre total de processeur par `tot_proc_num` ($=p$).

En mode SPMD, tous les processeurs exécutent le même code, ils calculent tous dans leur mémoire locale, et ils peuvent envoyer un message au processeur de numéro `proc_num()+1[p]` par `send(adr,L)`. La variable `adr` contient l'adresse de la première valeur dans la mémoire locale

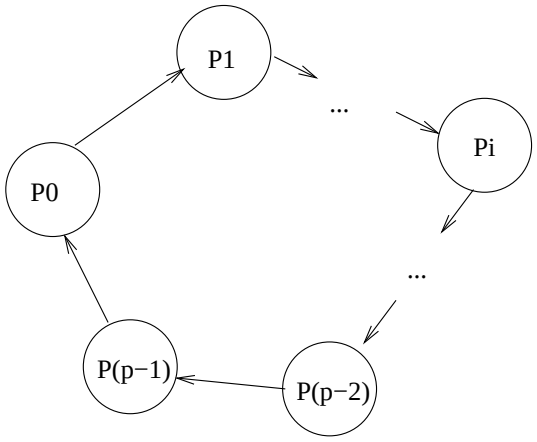


FIG. 8.2 – Architecture en anneau

de l'expéditeur et `L` est la longueur du message. De même, ils peuvent recevoir un message de `proc_num()-1[p]` par `receive(adr,L)`.

Le premier problème auquel on est confronté, avant même de penser à implémenter des algorithmes efficaces, est de s'arranger pour qu'à tout `send` corresponde un `receive`.

On peut faire plusieurs hypothèses possibles pour décrire la sémantique de telles primitives. Les `send` et `receive` peuvent être bloquants comme dans OCCAM. Plus classiquement, `send` est non bloquant mais `receive` est bloquant (mode par défaut en PVM, MPI). Sur des machines plus modernes, aucune opération n'est bloquante (trois threads sont utilisés en fait : un pour le calcul, un pour le `send` et un pour le `receive`).

La modélisation du coût d'une communication est difficile en général : ici envoyer ou recevoir un message de longueur L (au voisin immédiat) coûtera $\beta + L\tau$ où β est le coût d'initialisation (latence) et τ (débit) mesure la vitesse de transmission en régime permanent. Donc, *a priori*, envoyer ou recevoir un message de longueur L de `proc_num()+/-q` coûtera $q(\beta + L\tau)$. On verra que dans certains cas, on peut améliorer les performances de communication en "recouvrant" plusieurs communications au même moment (entre des paires de processeurs distincts).

8.3.2 Problème élémentaire : la diffusion

C'est l'envoi par un P_k d'un message de longueur L (stocké à l'adresse *adr*) à tous les autres processeurs. C'est une primitive implémentée de façon efficace dans la plupart des librairies de communications (PVM, MPI etc.). On va supposer ici que le `receive` est *bloquant*.

```
broadcast(k,adr,L) { // emetteur initial=k
  q = my_num();
  p = tot_proc_num();
  if (q == k)
    (1) send(adr,L);
  else
    if (q == k-1 mod p)
      (2) receive(adr,L);
    else {
      (3) receive(adr,L);
      (4) send(adr,L);
    }
}
```

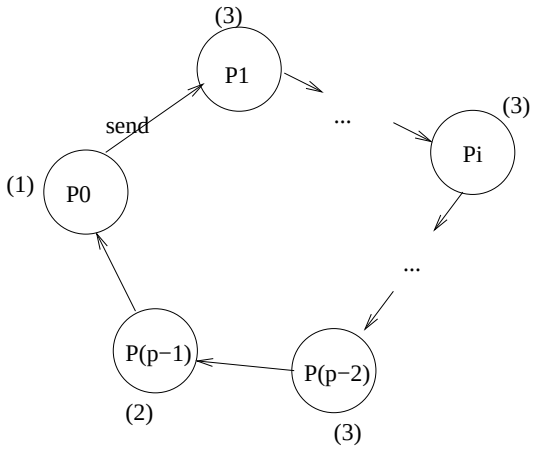


FIG. 8.3 – Exécution de la diffusion sur un anneau au temps 0.

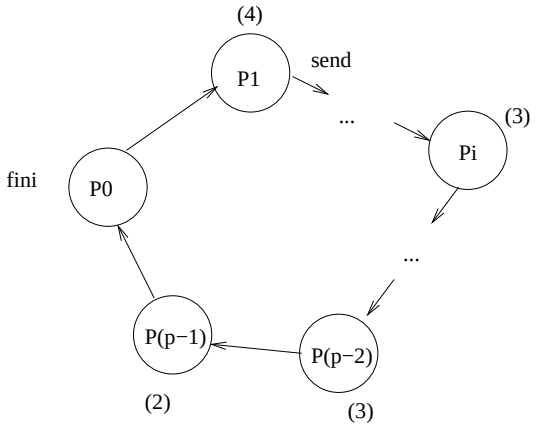


FIG. 8.4 – Exécution de la diffusion sur un anneau au temps $\beta + L\tau$.

L'exécution est décrite pour `k=0` au temps 0 à la figure 8.3, au temps $\beta + L\tau$ à la figure 8.4, au temps $j(\beta + L\tau)$ $(j < p-1)$ à la figure 8.5, et au temps $(p-1)(\beta + L\tau)$ à la figure 8.6.

8.3.3 Diffusion personnalisée

On suppose toujours ici un `send` non-bloquant et un `receive` bloquant. On veut programmer un envoi par P_k d'un message différent à tous les processeurs (en `adr[q]` dans P_k pour P_q). A la fin, chaque processeur devra avoir son message à la location `adr`. L'algorithme suivant opère en pipeline, et on obtient une bonne performance grâce à un recouvrement entre les différentes communications !

Le programmme est le suivant :

```
scatter(k,adr,L) {
  q = my_num();
  p = tot_proc_num();
  if (q == k) {
    adr = adr[k];
    for (i=1;i<p;i=i+1)
      send(adr[k-i mod p],L); }
```

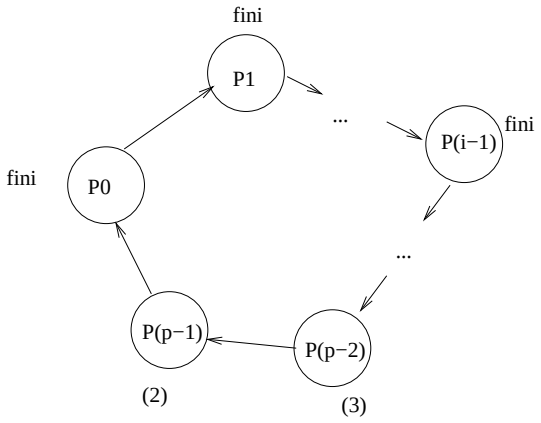


FIG. 8.5 – Exécution de la diffusion sur un anneau au temps $i(\beta + L\tau)$ $(i < p - 1)$.

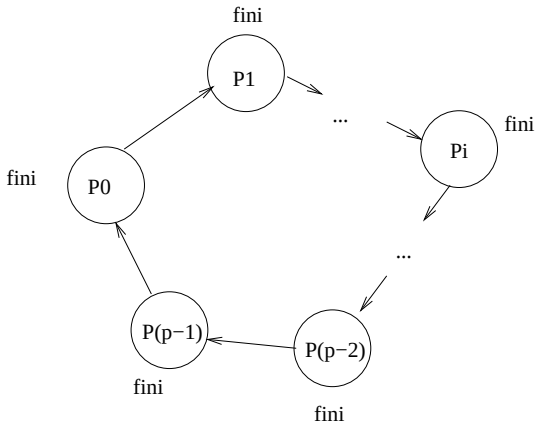


FIG. 8.6 – Exécution de la diffusion sur un anneau au temps $(p - 1)(\beta + L\tau)$.

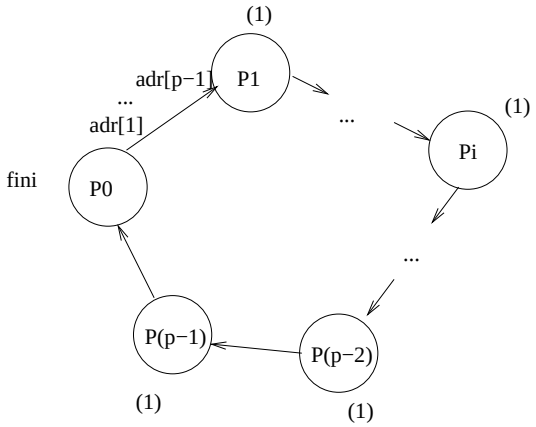


FIG. 8.7 – Exécution de la diffusion personnalisée au temps 0.

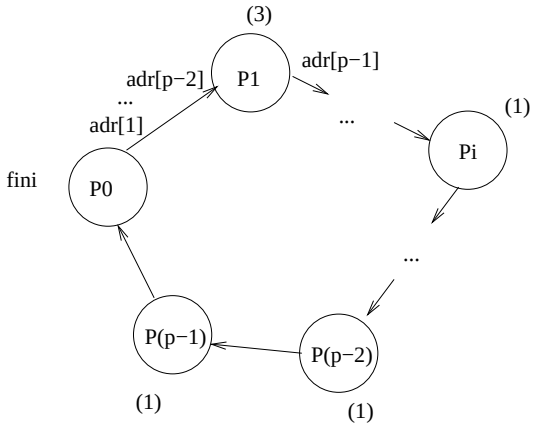


FIG. 8.8 – Exécution de la diffusion personnalisée au temps $\beta + L\tau$.

```
else
  (1) receive(adr,L);
for (i=1;i<k-q mod p;i = i+1) {
  (2) send(adr,L);
  (3) receive(temp,L);
  adr = temp; } }
```

Les exécutions pour `k=0` aux temps 0 $\beta+L\tau$, $i(\beta+L\tau)$ et enfin $(p-1)(\beta+L\tau)$, sont représentées respectivement aux figures 8.7, 8.8, 8.9 et 8.10.

8.3.4 Echange total

Maintenant, chaque processeur k veut envoyer un message à tous les autres. Au départ chaque processeur dispose de son message à envoyer à tous les autres à la location `my_adr`. A la fin, tous ont un tableau (le même) `adr[]` tel que `adr[q]` contient le message envoyé par le processeur `q`. Il se trouve que par la même technique de recouvrement des communications, cela peut se faire aussi en $(p-1)(\beta + L\tau)$ (et de même pour l'échange total personnalisé, voir [RL03]). Le programme est :

```
all-to-all(my_adr,adr,L) {
```

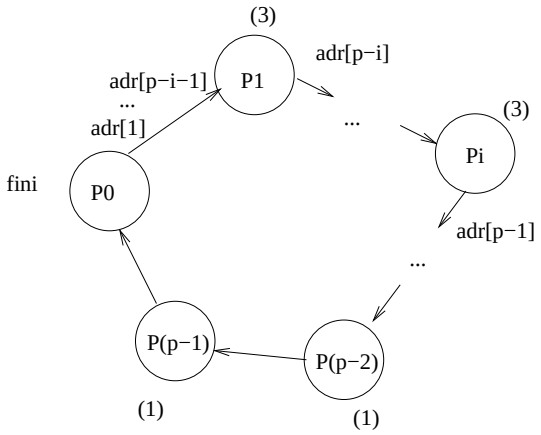


FIG. 8.9 – Exécution de la diffusion personnalisée au temps $i(\beta + L\tau)$.

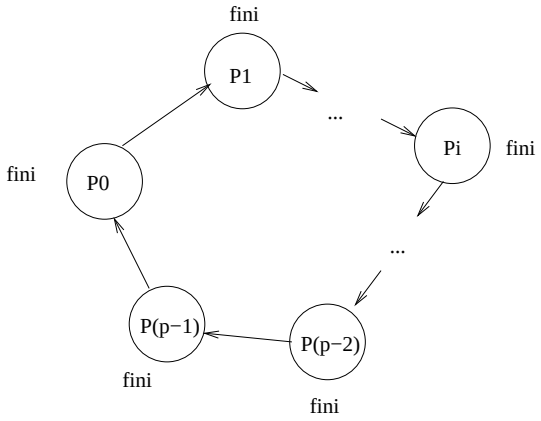


FIG. 8.10 – Exécution de la diffusion personnalisée au temps $(p-1)(\beta + L\tau)$.

```
  q = my_num();
  p = tot_proc_num();
  adr[q] == my_adr;
  for (i=1;i<p;i++) {
    send(adr[q-i+1 mod p],L);
    receive(adr[q-i mod p],L);
  }
}
```

8.3.5 Diffusion pipelinée

Les temps d'une diffusion simple et d'une diffusion personnalisée sont les mêmes ; peut-on améliorer le temps de la diffusion simple en utilisant les idées de la diffusion personnalisée ? La réponse est oui : il suffit de tronçonner le message à envoyer en r morceaux (r divise L bien choisi). L'émetteur envoie successivement les r morceaux, avec recouvrement partiel des communications. Au début, ces morceaux de messages sont dans `adr[1]`,. . .,`adr[r]` du processeur k. Le programme est :

```
broadcast(k,adr,L) {
  q = my_num();
  p = tot_proc_num();
  if (q == k)
    for (i=1;i<=r;i++) send(adr[i],L/r);
  else
    if (q == k-1 mod p)
      for (i=1;i<=r;i++) receive(adr[i],L/r);
    else {
      receive(adr[1],L/r);
      for (i=1;i<r;i++) {
        send(adr[i],L/r);
        receive(adr[i+1],L/r); } } }
```

Le temps d'exécution se calcule ainsi ; le premier morceau de longueur `L/r` du message sera arrivé au dernier processeur `k-1 mod p` en temps $(p-1)(\beta+\frac{L}{r}\tau)$ (diffusion simple). Les $r-1$ autres morceaux arrivent les uns derrière les autres, d'où un temps supplémentaire de $(r-1)(\beta+\frac{L}{r}\tau)$. En tout, cela fait un temps de $(p-2+r)(\beta+\frac{L}{r}\tau)$.

On peut maintenant optimiser le paramètre r. On trouve $r_{opt}=\sqrt{\frac{L(p-2)\tau}{\beta}}$. Le temps optimal d'exécution est donc de

$$\left(\sqrt{(p-2)\beta}+\sqrt{L\tau}\right)^2$$

Quand L tend vers l'infini, ceci est asymptotiquement équivalent à $L\tau$, le facteur p devient négligeable !

8.4 Election dans un anneau bidirectionnel

Chaque processeur part avec un identificateur propre (un entier dans notre cas), et au bout d'un temps fini, on veut que chaque processeur termine avec l'identificateur d'un même processeur, qui deviendra ainsi le "leader".

Dans la suite, les processeurs vont être organisés en anneau *bidirectionnel* synchrone :

- Les `n` processeurs sont numérotés de P_0 jusqu'à P_{n-1}. Par abus de notation, on ne décrira pas les indices des processeurs modulo `n`. Ainsi, par exemple, P_n est identifié à P_0.
- Chaque processeur P_i peut envoyer un message `send(adr,L,sens)` dont le contenu se trouve dans sa mémoire locale à l'adresse `adr`, et consiste en `L` entiers. La nouveauté est que P_i peut envoyer vers son voisin P_{i+1}, en faisant `sens=+`, mais aussi vers P_{i-1}, en faisant `sens=-`.

- De même, la réception s'écrira maintenant `recv(adr,L,sens)`. Un `recv(adr,L,+)` sur P_{i+1} réceptionnera le message émis par P_i, qui aura fait `send(adr,L,+)` (et de façon similaire pour le `-`).
- On va maintenant supposer que les processus ne connaissent pas leur indice, et donc pas ceux de leurs voisins non plus. Le processeur P_i n'a au départ dans sa mémoire locale qu'un entier pid_i représentant son identificateur, et un autre entier `leader` initialement à zéro. Chaque pid_i est unique, c'est-à-dire que $pid_i = pid_j$ implique $i = j$. Le but de l'algorithme d'élection est qu'un seul processus termine avec `leader=1`.
- On prend une hypothèse d'exécution synchrone : tous les codes seront écrits en mode SPMD, c'est-à-dire que le même code sera exécuté par tous les processeurs, et tous les `send` (respectivement `recv`) seront exécutés exactement au même moment, que l'on appellera *étape* : pour simplifier, on ne comptera que le nombre de `recv`. Un processeur est à l'étape k s'il a effectué exactement k `recv`. Cela implique donc que ni les `send` ni les `recv` ne sont bloquants, par contre, si on n'a envoyé aucun message à un processus P_i, alors `recv` fait sur P_i renverra le booléen faux (`false`), sinon, il renvoie le booléen vrai (`true`).

8.4.1 Algorithme de Le Lann, Chang et Roberts (LCR)

Dans cet algorithme, chaque processeur va essentiellement essayer de diffuser son identificateur aux autres processus. Le processus ayant l'identificateur le plus grand deviendra leader.

Les messages doivent tous transiter dans le même sens, soit +, soit -.

Au lieu de faire une diffusion complète, on peut s'arranger pour que quand un processus reçoit un identificateur, il le compare avec le sien : si celui qu'il a reçu est strictement plus grand que le sien, il continue à le passer sur le réseau. S'il est égal à son identificateur, il se déclare leader, sinon il ne fait rien. On enlève ainsi certaines communications inutiles.

Chaque processus fait :

```
LCR() {
  send(pid,1,+);
  while (recv(newpid,1,+)) {
    if (newpid==pid)
      leader = 1;
    else if (newpid>pid)
           send(newpid,1,+);
  }
}
```

Cet algorithme permet bien d'élire un leader. En effet, soit i_{max} le numéro du processeur ayant l'identificateur $pid_{i_{max}}$ maximal. Soit $0 \leq r \leq n-1$. On peut voir facilement par induction sur r que après r étapes, la valeur de `newpid` sur le processeur $P_{i_{max}+r}$ est $pid_{i_{max}}$. Ainsi, à l'étape n, $P_{i_{max}+n} = P_{i_{max}}$ aura reçu son numéro d'identificateur et en déduira qu'il est le leader.

Il faut maintenant voir que personne d'autre ne croit être le leader. On peut voir par induction sur r que pour toute étape r, pour tous i et j, si $i \neq i_{max}$ et $i_{max} \leq j < i$, alors P_j envoie un message différent de pid_i. Alors nécessairement, seul $P_{i_{max}}$ peut recevoir son propre identificateur, et est donc le seul leader possible.

Il faut n étapes et $O(n^2)$ communications.

Remarquez que l'on peut relâcher l'hypothèse synchrone et se contenter d'un `send` non bloquant et d'un `recv` bloquant, sans aucun changement dans l'algorithme.

8.4.2 Algorithme de Hirschberg et Sinclair (HS)

Cet algorithme fonctionne informellement de la façon suivante :

- Chaque processeur P_i opère par phases, que l'on numérote à partir de 0.
- A chaque phase l, le processeur P_i envoie des tokens contenant son identificateur dans les deux sens possibles, sur l'anneau.

- Ceux-ci vont parcourir une distance (nombre de noeuds traversés sur l'anneau) de 2^l au maximum (sous-phase d'envoi), avant d'essayer de revenir à leur emetteur P_i (sous-phase de retour).
- Si les deux tokens reviennent, P_i continue avec la phase $l+1$.
- Quand l'identificateur pid_i, émis par P_i, est dans la sous-phase d'envoi, et est réceptionné par P_j, alors,
  - si $pid_i < pid_j$ alors P_j ne fait rien,
  - si $pid_i > pid_j$ alors P_j continue à renvoyer (dans la sous-phase envoi ou retour, selon la distance déjà effectuée par le message pid_i) le token contenant pid_i,
  - si $pid_i = pid_j$ alors P_j devient leader.
- Dans la sous-phase retour, tous les processeurs relaient les tokens normalement.

Les tokens utilisés dans cet algorithme contiennent un identificateur, mais aussi un drapeau indiquant si le message est dans la phase envoi ou dans la phase retour, et un compteur (entier), indiquant la distance qu'il reste à parcourir dans la phase envoi avant de passer à la phase retour. On n'essaiera pas de coder ces tokens, et on se contentera d'utiliser les fonctions (que l'on supposera programmées par ailleurs) suivantes :

- les tokens sont représentés par une classe JAVA `token` contenant un constructeur `token(int phase, int message)` (`phase` est le numéro de phase à la création du token) ; on supposera qu'un token est de taille L donnée,
- `token incr(token x)` incrémente la distance parcourue par le token `x`,
- `boolean retour(token tok)` renvoie `true` si le message encapsulé dans `tok` a fini la sous-phase envoi, `false` sinon (par rapport au numéro de phase encapsulé),
- `int valeur(token x)` renvoie le message (entier) encapsulé par le token `x`.

Le pseudo-code correspondant, pour l'algorithme `HS`, est alors :

```
HS() {
  boolean leader, continuephase;
  int l;
  token plus, moins;
  l = 0;
  leader = false;

  continuephase = true;

  while (continuephase) {
    send(token(l,pid),L,+);
    send(token(l,pid),L,-);
    continuephase = false;

    while () {
      if (recv(plus,L,+)) {
        if (not retour(plus)) {
          if (valeur(plus) > pid) {
            plus = incr(plus);
            if (retour(plus))
              send(plus,L,-);
            else
              send(plus,L,+);
          }
          else if (valeur(plus) == pid) {
                 leader = true;
                 System.exit(0);
               }
        }
```

```
        else
          if (valeur(plus) == pid) {
            l = l+1;
            continuephase = true;
          }
          else
            send(incr(plus),L,-);

       if (recv(moins,L,-)) {
         if (not retour(moins)) {
           if (valeur(moins) > pid) {
             plus = incr(moins);
             if (retour(moins))
               send(moins,L,+);
             else
               send(moins,L,-);
           }
           else if (valeur(moins) == pid) {
                  leader = true;
                  System.exit(0);
                }
         }
        else
          if (valeur(moins) == pid) {
            l = l+1;
            continuephase = true;
          }
          else
            send(incr(moins),L,+);
       }
  }
}
```

Le nombre total de phases exécutées au maximum avant qu'un leader ne soit élu est évidemment borné par $1 + \lceil logn \rceil$, car si on a un processeur qui arrive à l'étape $\lceil logn \rceil$, il est nécessaire que son *pid* soit plus grand que tous les autres, comme $2^{\lceil logn \rceil} \geq n$.

Le temps mis par cet algorithme est donc de $O(n)$. En effet, chaque phase l coûte au plus 2^{l+1} (c'est le nombre de `recv` maximum que l'on peut avoir dans cette phase, en même temps par tous les processeurs impliqués dans cette phase). En sommant sur les $O(logn)$ phases, on trouve $O(n)$.

A la phase 0, chaque processus envoie un token dans chaque direction à la distance 1. Donc au maximum, il y a $4n$ messages à cette phase ($2n$ aller, et $2n$ retour).

Pour une phase $l > 0$, un processus envoie un token seulement si il a reçu un des deux tokens qu'il a envoyés à la phase $l-1$. Ce n'est le cas que si il n'a pas trouvé de processeur de *pid* supérieur à une distance au maximum de 2^{l-1}, dans chaque direction sur l'anneau. Cela implique que dans tout groupe de $2^{l-1} + 1$ processeurs consécutifs, un au plus va commencer une phase l. Donc on aura au plus

$$\left\lfloor \frac{n}{2^{l-1}+1} \right\rfloor$$

processeurs entrant en phase l. Donc le nombre total de messages envoyés en phase l sera borné (car chaque token envoyé parcourt au plus 2^l processeurs) par :

$$4\left(2^l \left\lfloor \frac{n}{2^{l-1}+1} \right\rfloor\right) \leq 8n$$

Comme on a un nombre de phases en $O(logn)$, on en déduit un nombre de communications de l'ordre de $O(nlog(n))$.

On a moins de communications, et l'algorithme sera meilleur que LCR si le débit des canaux est faible (moins de contention de messages).

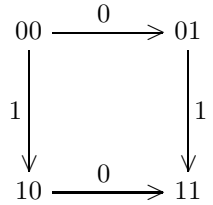
8.5 Communications dans un hypercube

On va examiner successivement les chemins de communication et en déduire les façon de router les messages dans un hypercube, puis appliquer tout cela au problème du broadcast dans un hypercube.

8.5.1 Chemins dans un hypercube

Un m-cube est la donnée de sommets numérotés de 0 à $2^m - 1$. Il existe une arête d'un sommet à un autre si les deux diffèrent seulement d'un bit dans leur écriture binaire.

Par exemple, un 2-cube est le carré suivant :



où les numéros sur les arcs indiquent le numéro du lien (ou du canal) sortant du noeud correspondant.

Soient A, B deux sommets d'un m-cube, et $H(A, B)$ leur distance de Hamming (le nombre de bits qui diffèrent dans l'écriture). Alors il existe un chemin de longueur $H(A, B)$ entre A et B (récurrence facile sur $H(A, B)$). En fait, il existe $H(A, B)!$ chemins entre A et B, dont seuls $H(A, B)$ sont indépendants (c'est-à-dire qu'ils passent par des sommets différents).

Un routage possible est le suivant. On "corrige" les bits de poids faibles d'abord. Par exemple, pour $A = 1011$, $B = 1101$, on fait : A xor $B = 0110$ (ou exclusif bit à bit). A envoie donc son message sur le lien 1 (c'est à dire vers 1001) avec en-tête 0100. Puis 1001, lisant l'entête, renvoie sur son lien 2, c'est à dire vers $1101 = B$.

On peut également écrire un algorithme dynamique qui corrige les bits selon les liens disponibles (voir à ce propos [RL03]).

8.5.2 Plongements d'anneaux et de grilles

Le code de Gray G_m de dimension m est défini récursivement par :

$$G_m = 0G_{m-1} \mid 1G^{rev}_{m-1}$$

- xG énumère les éléments de G en rajoutant x en tête de leur écriture binaire,
- G^{rev} énumère les éléments de G dans l'ordre renversé,
- $\mid$ est la concaténation (de "listes" de mots binaires).

Par exemple :

- $G_1 = \{0, 1\}$,
- $G_2 = \{00, 01, 11, 10\}$,
- $G_3 = \{000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100\}$,
- $G_4 = \{0000, 0001, 0011, 0010, 0110, 0111, 0101, 0100, 1100,$
  $1101, 1111, 1110, 1011, 1010, 1001, 1000\}$.

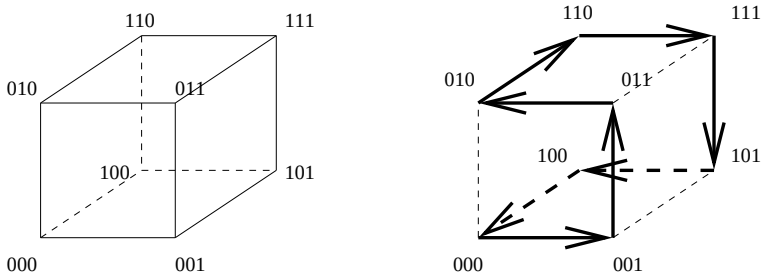


FIG. 8.11 – Plongement d'un anneau dans un hypercube.

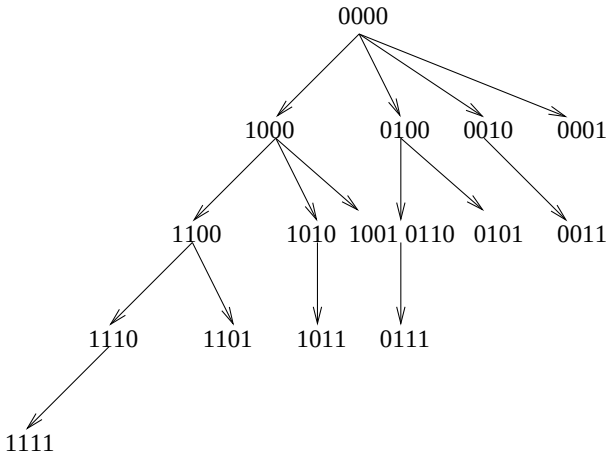


FIG. 8.12 – Un arbre couvrant pour un 4-cube.

(imaginer la numérotation des processeurs sur l'anneau, dans cet ordre - un seul bit change à chaque fois)

L'intérêt des codes de Gray est qu'ils permettent de définir un anneau de 2^m processeurs dans le m-cube grâce à G_m. Ils permettent également de définir un réseau torique de taille $2^r \times 2^s$ dans un m-cube avec $r + s = m$ (utiliser le code $G_r \times G_s$).

On trouvera un exemple de plongement d'anneau dans l'hypercube à la figure 8.11. On reconnaît l'anneau sur l'hypercube à la droite de cette figure, matérialisé par des arcs gras.

8.5.3 Diffusion simple dans l'hypercube

On suppose que le processeur 0 veut envoyer un message à tous les autres. Un premier algorithme naïf est le suivant : le processeur 0 envoie à tous ses voisins, puis tous ses voisins à tous leurs voisins etc. : ceci est très inefficace, car les messages sont distribués de façon très redondante ! On peut penser à un deuxième algorithme naïf, mais un peu moins : on utilise le code de Gray et on utilise la diffusion sur l'anneau. Mais il y a mieux, on va utiliser les arbres couvrants de l'hypercube.

On se donne les primitives suivantes : `send(cube-link,send-adr,L)`, et `receive(cube-link, recv-adr,L)`. On fait en sorte que les processeurs reçoivent le message sur le lien correspondant à leur premier 1 (à partir des poids faibles), et propagent sur les liens qui précèdent ce premier 1. Le processeur 0 est supposé avoir un 1 fictif en position m. Tout ceci va se passer en m phases, $i = m - 1 \rightarrow 0$. En fait, on construit à la fois un arbre couvrant de l'hypercube et l'algorithme de diffusion (voir la figure 8.12 dans le cas $m = 4$).

Sans entrer dans les détails, toujours pour $m = 4$, on a les phases suivantes :

– phase 3 : 0000 envoie le message sur le lien 3 à 1000,
– phase 2 : 0000 et 1000 envoient le message sur le lien 2, à 0100 et 1100 respectivement,
– ainsi de suite jusqu'à la phase 0.

Pour le cas général, on se reportera à [RL03].

Chapitre 9

Remote Method Invocation

Le RMI (Remote Method Invocation) permet d'invoquer des méthodes d'un objet distant, c'est-à-dire appartenant à une autre JVM, sur une autre machine. Cela permet donc de définir des architectures de type client/serveur, comme les "Remote Procedure Calls" POSIX. RMI se rapproche de plus en plus de CORBA (qui est "indépendant" du langage), et que l'on traitera rapidement en fin de chapitre.

Pour plus de détails, on se reportera à [RR] (duquel on a tiré certains exemples). On pourra également consulter la page `http ://java.sun.com/products/jdk/rmi/`.

9.1 Architecture

Une application RMI (ou client/serveur de façon générale) se compose d'un serveur de méthodes, et de clients. Un serveur est essentiellement une instance d'une classe "distante" que l'on peut référencer d'une autre machine, et sur laquelle on peut faire agir des méthodes "distantes". Il faut donc définir une classe qui implémente la méthode distante (serveur), dont les méthodes renvoient des objets pouvant "transiter sur le réseau". Ce sont les objets instances de classes implémentant l'interface `Serializable`. Ce sont des classes dont les objets peuvent être transcrits en "stream", c'est-à-dire en flots d'octets. La plupart des classes (et de leurs sous-classes) de base `String`, `HashTable`, `Vector`, `HashSet`, `ArrayList` etc. sont `Serializable`. On peut aussi "forcer" une classe à implémenter `Serializable`, mais cela est souvent un peu délicat. Il y a plusieurs méthodes selon les cas, et il faut parfois, dans les cas les plus difficiles, définir les méthodes :

```
private void writeObject(ObjectOutputStream aOutputStream) throws IOException;
private void readObject(ObjectInputStream aInputStream)
             throws ClassNotFoundException, IOException;
```

responsables respectivement de décrire un objet sous forme de flot d'octets et de reconstituer l'état d'un objet à partir d'un flot d'octets.

Dans le cas où on passe une classe `Serializable`, il faut que la définition de cette classe soit connue (c'est-à-dire copiée sur les différentes machines, ou accessible par NFS) des clients et du serveur. Il peut y avoir à gérer la politique de sécurité (sauf pour les objets "simples", comme `String`). On en reparlera dans un deuxième temps.

Plus généralement, une méthode d'un serveur peut également renvoyer des objets instances de classes `Remote`. Les classes `Remote` sont elles des classes dont les instances sont des objets ordinaires dans l'espace d'adressage de leur JVM, et pour lesquels des "pointeurs" sur ces objets peuvent être envoyés aux autres espaces d'adressage.

Il faut également programmer un ou plusieurs clients qui utilisent les méthodes distantes et initialisent un "registre" d'objets distants ("rmiregistry") qui associe aux noms d'objets l'adresse des machines qui les contiennent.

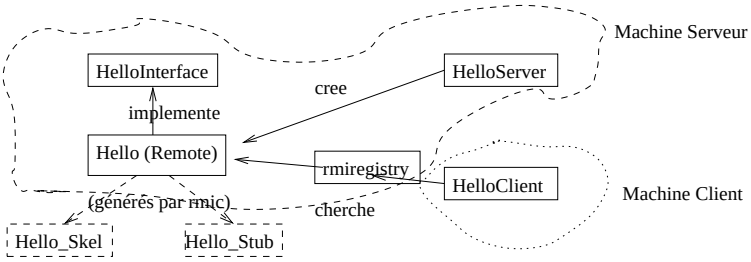


FIG. 9.1 – Les classes d'un "Hello World" distribué"

Pour pouvoir compiler séparément (c'est bien nécessaire dans le cas distribué !) serveurs et clients, il faut définir les interfaces des classes utilisées. Il y a un certain nombre de fichiers générés par des outils RMI qui vont également se révéler indispensables.

9.2 Exemple : RMI simple

Prenons un premier exemple, où l'on retourne une valeur `Serializable` : il va s'agir d'un "Hello World" distribué. On construit les classes de la figure 9.1.

Définissons d'abord l'interface de l'objet distant :

```
import java.rmi.*;

public interface HelloInterface extends Remote {
    public String say() throws RemoteException;
}
```

Son unique méthode `say` est celle qui va afficher à l'écran du client "Hello World". Son implémentation est :

```
import java.rmi.*;
import java.rmi.server.*;

public class Hello extends UnicastRemoteObject
  implements HelloInterface {
  private String message;

  public Hello(String msg) throws RemoteException {
    message = msg; }

  public String say() throws RemoteException {
    return message;
  }
}
```

On peut compiler ces deux sources JAVA :

```
javac HelloInterface.java
javac Hello.java
```

ce qui crée `HelloInterface.class` et `Hello.class`.

Il faut maintenant créer les "stubs" et les "squelettes". Le rôle des stubs et des squelettes est le suivant. Le fournisseur de service exporte un type de référence. Lorsque le client reçoit

cette référence, RMI charge un stub qui transcrit les appels à cette référence en un appel au fournisseur. Ce processus de *marshalling* utilise la *serialization* (séquentialisation) des objets. Du côté du serveur, un squelette effectue l'*unmarshalling* et invoque la méthode adéquate du serveur. La création des stubs et squelette se fait par la commande `rmic` sur le code de l'objet distant :

```
rmic Hello
```

Cela crée `Hello_Stub.class` et `Hello_Skel.class`.

Passons maintenant au client :

```
import java.rmi.*;
public class HelloClient {
  public static void main(String[] argv) {
    try {
      HelloInterface hello =
      (HelloInterface) Naming.lookup
              ("//cher.polytechnique.fr/Hello");
      System.out.println(hello.say());
    } catch(Exception e) {
        System.out.println("HelloClient exception: "+e);
    }
  }
}
```

Ici on a supposé que le serveur - c'est-à-dire la classe sur laquelle seront repercutées les demandes d'un client - sera toujours sur `cher`. On verra dans d'autres exemples, des méthodes plus souples.

Enfin, le serveur lui-même est la classe `HelloServer` suivante :

```
import java.rmi.*;

public class HelloServer {
  public static void main(String[] argv) {
    try {
      Naming.rebind("Hello",new Hello("Hello, world!"));
      System.out.println("Hello Server is ready.");
    } catch(Exception e) {
        System.out.println("Hello Server failed: "+e);
    }
  }
}
```

On peut maintenant compiler et démarrer le serveur en faisant bien attention au `CLASSPATH` (qui doit au moins contenir `.` et/ou les répertoires contenant les `.class` nécessaires, accessibles de toutes les machines sous NFS).

```
javac HelloClient.java
javac HelloServer.java
```

Pour exécuter les programmes client et serveur, il faut démarrer le registre (ou serveur) de noms :

```
rmiregistry &
```

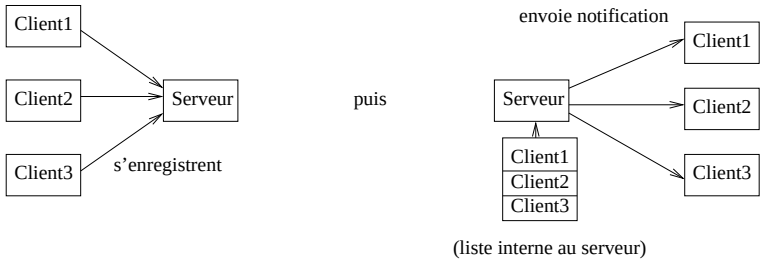


FIG. 9.2 – Organisation des classes, pour un RMI avec callback

ou éventuellement, `rmiregistry`

port

`&` où

port

est un numéro de port sur lequel le démon `rmiregistry` va communiquer. Ce numéro est par défaut 1099, mais quand plusieurs utilisateurs utilisent la même machine, il faut que plusieurs démons cohabitent sur la même machine, mais communiquent sur des ports distinct.

On peut maintenant démarrer le serveur (Hello) :

```
[goubaul1@cher HelloNormal]$ java HelloServer
Hello Server is ready.
```

Enfin, on démarre des clients et on lance une exécution :

```
[goubaul1@loire HelloNormal]$ java HelloClient
Hello, world!
```

9.3 RMI avec Callback

L'idée vient de la programmation "événementielle", typique d'interfaces graphiques, par exemple AWT, que vous avez vu en cours de tronc-commun. Les "clients" vont s'enregistrer auprès d'un serveur. Le "serveur" va les "rappeler" uniquement lorsque certains événements se produisent. Le client n'a pas ainsi à faire de "l'active polling" (c'est-à-dire à demander des nouvelles continuellement au serveur) pour être mis au courant des événements.

Le problème est, comment notifier un objet (distant) de l'apparition d'un événement ? Il suffit en fait de passer la référence de l'objet à rappeler au serveur chargé de suivre les événements. A l'apparition de l'événement, le serveur va invoquer la méthode de notification du client. Ainsi, pour chaque type d'événement, on crée une interface spécifique (pour le client qui veut en être notifié), et les clients potentiels à notifier doivent s'enregistrer auprès d'une implémentation de cette interface. Cela implique que "clients" et "serveurs" sont tous à leur tour "serveurs" et "clients".

Voici un petit exemple, tiré de [RR], dont les classes et interfaces sont résumées à la figure 9.2.

On définit l'interface associée à un événement particulier, ici un changement de température :

```
interface TemperatureListener extends java.rmi.Remote {
    public void temperatureChanged(double temperature)
         throws java.rmi.RemoteException;
}
```

C'est la méthode de notification de tout client intéressé par cet événement. C'est forcément un objet `Remote`. L'interface du serveur d'événements doit au moins pouvoir permettre l'inscription et la désinscription de clients voulant être notifiés :

```
interface TemperatureSensor extends java.rmi.Remote {
    public double getTemperature() throws
        java.rmi.RemoteException;
    public void addTemperatureListener
        (TemperatureListener listener)
        throws java.rmi.RemoteException;
    public void removeTemperatureListener
        (TemperatureListener listener)
        throws java.rmi.RemoteException; }
```

Le serveur doit être une sous-classe de `UnicastRemoteObject` (pour être un serveur), doit implémenter l'interface `TemperatureListener` pour pouvoir rappeler les clients en attente, ainsi que `Runnable` ici pour pouvoir avoir un thread indépendant qui simule les changements de température. En voici l'implémentation :

```
import java.util.*;
import java.rmi.*;
import java.rmi.server.*;

public class TemperatureSensorServer
    extends UnicastRemoteObject
    implements TemperatureSensor, Runnable {
    private volatile double temp;
    private Vector list = new Vector();
```

Le vecteur `list` contiendra la liste des clients. On peut maintenant écrire le constructeur (qui prend une température initiale) et une méthode de récupération de la température :

```
    public TemperatureSensorServer()
      throws java.rmi.RemoteException {
        temp = 98.0; }

    public double getTemperature()
      throws java.rmi.RemoteException {
        return temp; }
```

On a aussi des méthodes d'ajout et de retrait de clients :

```
public void addTemperatureListener
              (TemperatureListener listener)
  throws java.rmi.RemoteException {
  System.out.println("adding listener -"+listener);
  list.add(listener); }

public void removeTemperatureListener
              (TemperatureListener listener)
  throws java.rmi.RemoteException {
  System.out.println("removing listener -"+listener);
  list.remove(listener); }
```

On construit également un thread responsable du changement aléatoire de la température :

```
public void run()
{ Random r = new Random();
  for (;;)
```

```
    { try {
        int duration = r.nextInt() % 10000 +2000;
        if (duration < 0) duration = duration*(-1);
        Thread.sleep(duration); }
      catch(InterruptedException ie) {}
      int num = r.nextInt();
      if (num < 0)
        temp += .5;
      else
        temp -= .5;
      notifyListeners(); } }
```

`notifyListeners()` est la méthode suivante, chargée de diffuser le changement d'événements à tous les clients enregistrés :

```
private void notifyListeners() {
  for (Enumeration e = list.elements(); e.hasMoreElements();)
  { TemperatureListener listener =
        (TemperatureListener) e.nextElement();
    try {
      listener.temperatureChanged(temp);
    } catch(RemoteException re) {
        System.out.println("removing listener -"+listener);
        list.remove(listener); } } }
```

on fait simplement appel, pour chaque client, à la méthode de notification `temperatureChanged`. Enfin, on enregistre le service auprès du `rmiregistry` (éventuellement fourni à la ligne de commande, contrairement au premier exemple de RMI simple) :

```
public static void main(String args[]) {
  System.out.println("Loading temperature service");
  try {
    TemperatureSensorServer sensor =
        new TemperatureSensorServer();
    String registry = "localhost";
    if (args.length >= 1)
      registry = args[0];
    String registration = "rmi://"+registry+
                          "/TemperatureSensor";
    Naming.rebind(registration,sensor);
```

et on démarre le thread en charge de changer aléatoirement la température, et de gérer des exceptions :

```
    Thread thread = new Thread(sensor);
    thread.start(); }
  catch (RemoteException re) {
    System.err.println("Remote Error - "+re); }
  catch (Exception e) {
    System.err.println("Error - "+e); } } }
```

Passons maintenant aux clients :

```
import java.rmi.*;
import java.rmi.server.*;
```

```
public class TemperatureMonitor extends UnicastRemoteObject
    implements TemperatureListener {
    public TemperatureMonitor() throws RemoteException {}
```

Il étend `UnicastRemoteObject` car c'est un serveur également ! De même, il implémente `TemperatureListener`. On remarquera qu'on a un constructeur vide : c'est celui d'`Object` qui est appelé. Maintenant, on effectue la recherche du service serveur d'événements :

```
public static void main(String args[]) {
  System.out.println("Looking for temperature sensor");
  try {
    String registry = "localhost";
    if (args.length >= 1)
    registry = args[0];
    String registration = "rmi://"+registry+
                          "/TemperatureSensor";
    Remote remoteService = Naming.lookup(registration);
    TemperatureSensor sensor = (TemperatureSensor)
                               remoteService;
```

Et on crée un moniteur que l'on enregistre auprès du serveur d'événements :

```
    double reading = sensor.getTemperature();
    System.out.println("Original temp : "+reading);
    TemperatureMonitor monitor = new TemperatureMonitor();
    sensor.addTemperatureListener(monitor);
```

On n'oublie pas de gérer les différentes exceptions possibles :

```
  } catch(NotBoundException nbe) {
      System.out.println("No sensors available"); }
    catch (RemoteException re) {
      System.out.println("RMI Error - "+re); }
    catch (Exception e) {
      System.out.println("Error - "+e); } }
```

Enfin, on implémente la méthode de rappel :

```
public void temperatureChanged(double temperature)
  throws java.rmi.RemoteException {
  System.out.println("Temperature change event : "
                     +temperature);
}
```

On peut maintenant compiler le tout :

```
[goubaul1@cher Ex3]$ javac *.java
[goubaul1@cher Ex3]$ rmic TemperatureMonitor
[goubaul1@cher Ex3]$ rmic TemperatureSensorServer
```

Puis exécuter le programme distribué :

```
[goubaul1@cher Ex3]$ rmiregistry &
[goubaul1@cher Ex3]$ java TemperatureSensorServer
Loading temperature service
```

On crée un premier client (sur loire) :

```
[goubaul1@loire Ex3]$ rmiregistry &
[goubaul1@loire Ex3]$ java TemperatureMonitor cher
Looking for temperature sensor
Original temp : 100.0
Temperature change event : 99.5
Temperature change event : 100.0
Temperature change event : 100.5
Temperature change event : 100.0
Temperature change event : 100.5
Temperature change event : 101.0
Temperature change event : 100.5
Temperature change event : 100.0
Temperature change event : 100.5
Temperature change event : 101.0
Temperature change event : 101.5
```

On voit alors sur la console de cher :

```
adding listener -TemperatureMonitor_Stub[RemoteStub
[ref: [endpoint:[129.104.254.64:3224](remote),
objID:[6e1408:f29e197d47:-8000, 0]]]]
```

Rajoutons un moniteur sur doubs :

```
[goubaul1@doubs Ex3]$ rmiregistry &
[goubaul1@doubs Ex3]$ java TemperatureMonitor cher
Looking for temperature sensor
Original temp : 101.5
Temperature change event : 102.0
Temperature change event : 102.5
Temperature change event : 103.0
Temperature change event : 102.5
Temperature change event : 103.0
Temperature change event : 103.5
Temperature change event : 102.5
Temperature change event : 102.0
```

Ce qui produit sur cher :

```
adding listener -TemperatureMonitor_Stub[RemoteStub
[ref: [endpoint:[129.104.254.57:3648](remote),
objID:[6e1408:f29de7882e:-8000, 0]]]]
```

On voit bien que les températures et événements sont synchronisés avec l'autre client sur loire :

```
Temperature change event : 102.0
Temperature change event : 102.5
Temperature change event : 103.0
Temperature change event : 102.5
Temperature change event : 103.0
Temperature change event : 103.5
^C
[goubaul1@loire Ex3]$
```

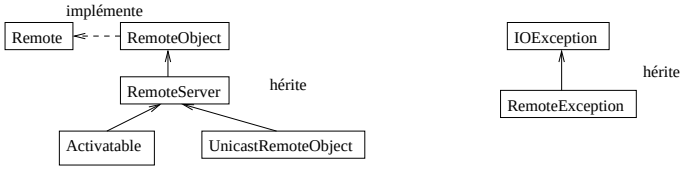


FIG. 9.3 – Les différentes classes et interfaces RMI

On a interrompu le moniteur sur loire, du coup, on voit à la console, sur cher :

```
removing listener -TemperatureMonitor_Stub[RemoteStub
[ref: [endpoint:[129.104.254.64:3224](remote),
objID:[6e1408:f29e197d47:-8000, 0]]]]
```

On interrompt par Control-C sur doubs, et on voit sur cher :

```
removing listener -TemperatureMonitor_Stub[RemoteStub
[ref: [endpoint:[129.104.254.57:3648](remote),
objID:[6e1408:f29de7882e:-8000, 0]]]]
```

9.4 RMI avec réveil de serveur

Il reste des problèmes avec les méthodes précédentes. Même si les services sont peu souvent utilisés, il faut que les serveurs tournent en permanence. De plus les serveurs doivent créer et exporter les objets distants. Tout cela représente une consommation inutile de mémoire et de CPU.

Depuis JAVA 2 on peut activer à distance un objet distant. Cela permet d'enregistrer un service RMI sans l'instancier, le service RMI défini par cette méthode étant inactif jusqu'à ce qu'un client y fasse appel, et "réveille" ainsi le serveur. Un processus démon est chargé d'écouter les requêtes et de réveiller les services : `rmid`.

A la place du service, une sorte de "proxy" est enregistré auprès du serveur de services RMI (`rmiregistry`). Contrairement aux serveurs instances de `UnicastRemoteObject`, cette "fausse" référence ne s'exécute que pendant un cours instant, pour inscrire le service auprès du `rmiregistry`, puis aux moments des appels au service.

Quand le client appelle ce service, le `rmiregistry` fait appel à cette fausse référence. Celle-ci vérifie si elle a un pointeur sur le vrai service. Au cas où elle n'en a pas, elle fait appel au démon `rmid` pour créer une instance du service (cela prend un certain temps, la première fois), puis transmet l'appel au service nouvellement créé.

En pratique cela est transparent pour le client : le client n'a en rien besoin de savoir comment le service est implémenté (activation à distance, ou comme serveur permanent). La création du service est un peu différente du cas du serveur résident, mais son code reste similaire.

Les différentes classes et interfaces sont représentées à la figure 9.3. Celles-ci font appel aux paquetages RMI suivants :

- `java.rmi` définit l'interface `RemoteInterface`, et les exceptions,
- `java.rmi.activation` (depuis JAVA2) : permet l'activation à distance des objets,
- `java.rmi.dgc` : s'occupe du ramassage de miettes dans un environnement distribué,
- `java.rmi.registry` fournit l'interface permettant de représenter un `rmiregistry`, d'en créer un, ou d'en trouver un,
- `java.rmi.server` fournit les classes et interfaces pour les serveurs RMI.

On pourra se reporter à la documentation en ligne :

`http ://java.sun.com/j2se/1.4.2/docs/guide/rmi/index.html`

Commençons par examiner la façon dont on peut définir l'interface du serveur activable à distance.

L'interface du service ne contient que les méthodes désirées sans argument, mais devant renvoyer une exception de type `java.rmi.RemoteException`. Ceci est imposé par `rmic` :

```
public interface InterfaceObjetActivable
  extends java.rmi.Remote
{  public void MethodeA() throws java.rmi.RemoteException;
   public void MethodeB() throws java.rmi.RemoteException;
  ... }
```

Cette interface peut être en fait implémentée par un objet activable à distance ou un service permanent `UnicastRemoteObject`.

L'implémentation du serveur doit être une instance de

`java.rmi.activation.Activatable`,

(*en fait, il y a aussi moyen de faire autrement*) et doit implémenter un constructeur particulier, ainsi que les méthodes désirées `MethodeA` etc.

On aura typiquement :

```
public class ImplementationObjetActivable extends
             java.rmi.activation.Activatable
             implements InterfaceObjetActivable
{
  public ImplementationObjetActivable (
    java.rmi.activation.ActivationID activationID,
    java.rmi.MashalledObject data) throws
    java.rmi.RemoteException
    { super(activationID,0); }
```

(appelle le constructeur de la classe parent `Activatable(ID,0)`)

Enfin, il faudra implémenter la méthode rendant le service attendu :

```
  public void doSomething()
  {
    ...
  }
}
```

L'activation de l'objet est en général incluse dans le `main` de l'implémentation de l'objet (service). Le code est assez compliqué du fait que doivent être gérés la politique de sécurité, les propriétés et droits du code exécutable, et enfin l'inscription auprès de `rmid` et `rmiregistry`.

9.4.1 Exemple d'une "lampe"

On va construire les classes représentées à la figure 9.4.

L'interface du serveur activable est :

```
package examples;
import java.rmi.*;

public interface RMILightBulb extends Remote {
    public void on() throws RemoteException;
    public void off() throws RemoteException;
    public boolean isOn() throws RemoteException;
}
```

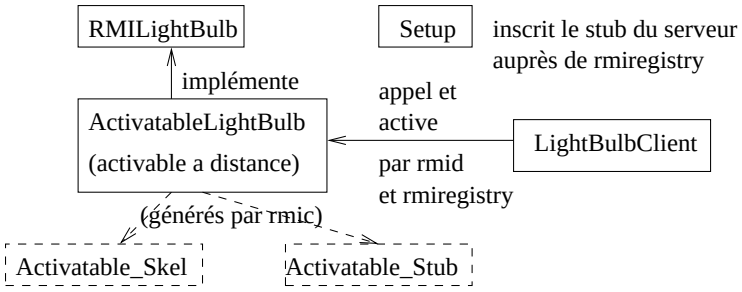


FIG. 9.4 – Classes pour la lampe activable à distance

Et un client possible est décrit plus bas. Remarquez qu'il serait le même si on avait utilisé une implémentation du serveur comme instance de `UnicastRemoteObject`.

```
package examples;
import java.rmi.*;

public class LightBulbClient {
    public static void main(String args[]) {
System.out.println("Recherche d'une lampe...");
```

A ce point du code, on doit utiliser `rmiregistry` :

```
  /* voir Server */
System.setSecurityManager(new RMISecurityManager());
try {
  String registry = "localhost";
  if (args.length >= 1)
    registry = args[0];
  String registration = "rmi://"+registry+
              "/ActivatableLightBulbServer";
  Remote remoteService = Naming.lookup(registration);
  RMILightBulb bulbService = (RMILightBulb) remoteService;
```

Cela permet de spécifier la machine où se trouve le serveur, et le `rmiregistry` correspondant. Maintenant on procède à l'appel aux services :

```
    System.out.println("Appel de bulbservice.on()");
    bulbService.on();
    System.out.println("Lampe : "+bulbService.isOn());

    System.out.println("Appel de bulbservice.off()");
    bulbService.off();
    System.out.println("Lampe : "+bulbService.isOn());
```

Enfin on doit récuper les exceptions :

```
    } catch(NotBoundException nbe) {
      System.out.println("Pas de lampe dans le
                        repertoire de services!");
   } catch(RemoteException re) {
   System.out.println("RMI Error - "+re);
  } catch(Exception e) {
```

```
  System.out.println("Error - "+e);
  }
 }
}
```

Le serveur activable à distance est maintenant :

```
package examples;

import java.rmi.*;
import java.rmi.activation.*;

public class ActivatableLightBulbServer
extends Activatable implements RMILightBulb {
    public ActivatableLightBulbServer
              (ActivationID activationID,
               MarshalledObject data)
                 throws RemoteException {
        super(activationID,0);
        setBulb(false); }
```

On arrive enfin aux services eux-mêmes :

```
public boolean isOn() throws RemoteException {
  return getBulb();
}

public void setBulb(boolean value)
  throws RemoteException {
  lightOn = value; }

public boolean getBulb() throws RemoteException {
  return lightOn; } }

private boolean lightOn;

public void on() throws RemoteException {
  setBulb(true);
}

public void off() throws RemoteException {
  setBulb(false);
}
```

On en arrive au `main` de `Setup` et à la gestion de la politique de sécurité :

```
package examples;
import java.rmi.*;
import java.rmi.activation.*;
import java.util.Properties;
public class Setup {
  public static void main(String[] args) throws Exception {
    System.setSecurityManager(new RMISecurityManager());
    Properties props = new Properties();
    props.put("java.security.policy",
"/users/profs/info/goubaul1/Cours03/RMI/Ex2/activepolicy");
```

La politique de sécurité doit être spécifiée à la ligne de commande ; on le verra plus loin quand on parle de l'exécution. On doit également créer un descripteur de groupe :

```
  ActivationGroupDesc.CommandEnvironment ace = null;
  ActivationGroupDesc exampleGroup =
    new ActivationGroupDesc(props, ace);
```

qui permet d'associer des propriétés et des droits à l'exécution. On récupére le descripteur du démon `rmid`, puis on y enregistre le descripteur de groupe :

```
ActivationGroupID agi =
  ActivationGroup.getSystem().registerGroup(exampleGroup);
```

On crée maintenant un descripteur d'activation du code. Au sein du groupe nouvellement créé, on passe le nom de la classe, l'endroit où se trouve le code, et une donnée optionnelle, une version "serialized" de l'objet distant (de type `MarshalledObject`) :

```
  String location =
"file:/users/profs/info/goubaul1/Cours03/RMI/Ex2/";
  MarshalledObject data = null;
  ActivationDesc desc = new ActivationDesc
    (agi, "examples.ActivatableLightBulbServer",
     location, data);
```

Revenons au code. On indique l'endroit où se trouve le code exécutable :

```
java.io.File location = new java.io.File(".");
String strLoc = "file://"
+URLEncoder.encode(location.getAbsolutePath(),"UTF-8");
System.out.println("Code \‘a ex\’ecuter : "+strLoc);
```

L'encodage `URLEncoder` permet d'être compatible avec les systèmes Windows etc. On peut aussi utiliser un serveur `http ://...` pour le chargement dynamique de classes.

Sur un petit système en effet, on peut gérer les stubs créés : il suffit en effet de recopier, ou d'avoir accès par NFS à tous ces fichiers sur toutes les machines considérées. Mais ce n'est pas pratique tout le temps, car cela limite singulièrement la distance entre le client et le serveur. En fait, on peut acccéder aux serveurs par adresse `http` :

```
java -Djava.rmi.server.codebase=http://hostname:port/path
```

On enregistre maintenant l'objet auprès du `rmid` :

```
RMILightBulb stub = (RMILightBulb)Activatable.register(desc);
System.out.println("Got stub for ActivatableLightBulbServer");
```

Cela renvoie un "stub" que l'on peut enregistrer auprès du serveur de services `rmiregistry` :

```
Naming.rebind("ActivatableLightBulbServer", mri);
System.out.println("Exported ActivatableLightBulbServer");
System.exit(0); } }
```

Cela est similaire au cas d'implémentation par `UnicastRemoteObject` - sauf que c'est le "stub" et pas l'objet lui-même qui est inscrit.

9.4.2 Complément : politiques de sécurité

Un programme JAVA peut dans certaines circonstances avoir à s'associer une "politique de sécurité" donnant les droits d'objets provenant de certaines autres machines. C'est typiquement le cas pour des objets `Serializable` transitant entre applications distantes. Par exemple, la connection par `socket` à une machine distante passe par la méthode `checkConnect(String host, int port)` du `SecurityManager` courant (en fait, c'est une sous-classe `RMISecurityManager` pour les politiques concernant RMI), définissant la politique de sécurité courante. En cas de non autorisation, on obtient des messages du type :

```
java.security.AccessControlException: access denied
(java.net.SocketPermission 127.0.0.1:1099 connect,resolve)
```

Pour associer une politique de sécurité à un code JAVA, il faut construire un objet instance de `SecurityManager`, surcharger les fonctions `check...` dont on veut changer la politique de sécurité, et invoquer la méthode de la classe `System`, `setSecurityManager`, en lui passant cet objet créé plus haut.

On fera par exemple :

```
System.setSecurityManager(new RMISecurityManager() {
  public void checkConnect(String host, int port) {}
  public void checkConnect(String host, int port,
                           Object context) {}
});
```

Ce code utilise une classe anonyme, sous-classe de `RMISecurityManager` dans laquelle les méthodes `checkConnect` retournent faux. On n'a donc aucune permission de créer des sockets pour communiquer avec d'autres machines.

A partir de JAVA 1.2, une autre méthode est fournie en plus. Toutes les méthodes `check...` font appel à la méthode `checkPermission` à laquelle on passe le type de permission souhaité. Par exemple `checkConnect` appelle `checkPermission` sur un objet `SocketPermission`. La liste des permissions autorisées est gérée par la classe `Permissions`.

Chaque programme a une politique de sécurité courante, instance de `Policy`, qui est `Policy.getPolicy()`. On peut modifier la politique de sécurité courante (comme avant avec le `SecurityManager`) en faisant appel à `Policy.setPolicy`. Un fichier de permissions (lu au démarrage d'un programme) de la forme :

```
grant codeBase "file:/home/goubault/-" {
  permission java.security.AllPermission;
};
```

donnera tous les droits à tous les programmes dans `/home/goubault/`

Un autre exemple un peu plus fin serait :

```
grant codeBase "file:/home/goubault/-" {
  permission java.net.SocketPermission
    "129.104.254.54:1024-", "connect, accept";
}
```

qui permet d'utiliser les *sockets* sur `loire.polytechnique.fr`, avec un numéro de port supérieur à 1024.

On peut aussi utiliser `policytool` pour générer ces fichiers. En pratique, pour utiliser le fichier de permissions en question (fichier), à l'exécution du `main` de la classe `maclasse`, tout en spécifiant le répertoire contenant le code, on fera :

```
java -Djava.security.policy=FICHIER
     -D-Djava.rmi.server.codebase=file:/LOCATION
     MACLASSE
```

Revenons maintenant à l'exemple de la section précédente. Il faut le compiler, et créer les fichiers stubs et squelettes :

```
javac -d . RMILightBulb.java
javac -d . LightBulbClient.java
javac -d . Setup.java
javac -d . ActivatableLightBulbServer.java
rmic ActivatableLightBulbServer
```

(le `-d .` pour créer les répertoires correspondants aux packages)

On lance maintenant les démons sur la machine correspondant au serveur (ici `loire`). On commence par lancer `rmiregistry` (avec un `CLASSPATH` ne contenant pas les `.class` appelés par le client) puis par spécifier la politique de sécurité. Par exemple ici, on donne toutes les permissions (dans le fichier `activepolicy`) :

```
grant {
  permission java.security.AllPermission;
};
```

Enfin on lance `rmid -J-Djava.security.policy=activepolicy`

Exécutons enfin ce programme :

```
[goubaul1@loire Ex2]$ java
  -Djava.security.policy=activepolicy
  -Djava.rmi.server.codebase=file:/. examples.Setup
Got the stub for the ActivatableLightBulbServer
Exported ActivatableLightBulbServer
```

(pour spécifier la politique de sécurité)

On exécute le client sur `cher` :

```
[goubaul1@cher Ex2]$ java -Djava.security.policy=activepolicy
examples.LightBulbClient loire
Looking for light bulb service
Invoking bulbservice.on()
Bulb state : true
Invoking bulbservice.off()
Bulb state : false
```

Compararons brièvement avec une implémentation de type `UnicastRemoteObject`

Le serveur lui-même (voir `~goubaul1/RMI/Ex1`) est :

```
public class RMILightBulbImpl extends
java.rmi.server.UnicastRemoteObject
                implements RMILightBulb {
    public RMILightBulbImpl()
    throws java.rmi.RemoteException {
      setBulb(false);
    }

    private boolean lightOn;

    public void on()
      throws java.rmi.RemoteException {
        setBulb(true); }
```

```
    public void off()
      throws java.rmi.RemoteException {
        setBulb(false); }

    public boolean isOn()
      throws java.rmi.RemoteException {
        return getBulb(); }

    public void setBulb(boolean value) {
        lightOn = value; }
    public boolean getBulb() {
        return lightOn; } }
```

Mais, l'interface du serveur reste la même :

```
public interface RMILightBulb extends java.rmi.Remote {
    public void on() throws java.rmi.RemoteException;
    public void off() throws java.rmi.RemoteException;
    public boolean isOn() throws java.rmi.RemoteException;
}
```

Et on a exactement le même client. L'exécution se ferait de la façon suivante : sur cher (serveur) :

```
[goubaul1@cher Ex1]$ java LightBulbServer
Loading RMI service
RemoteStub [ref: [endpoint:[129.104.254.54:1867](local),
            objID:[0]]]
```

Et sur loire (client) :

```
[goubaul1@loire Ex1]$ java LightBulbClient cher
Looking for light bulb service
Invoking bulbservice.on()
Bulb state : true
Invoking bulbservice.off()
Bulb state : false
```

9.5 CORBA

Corba est une architecture distribuée dans laquelle des clients émettent des requêtes à destination d'objets, qui s'exécutent dans des processus serveurs. Ces objets répondent aux clients par la transmission d'informations bien que ces deux éléments (client et serveur) soient localisés dans des espaces mémoire différents, généralement sur des machines distantes.

Lors du développement d'une application Corba, le dialogue entre les différents constituants est rendu totalement transparent pour le développeur. Le serveur déclare mettre à disposition ses objets et le client se contente de demander une connexion à un ou à certains de ces objets, sans pour autant en connaître obligatoirement la localisation ou le format. Dans ces deux cas, l'ORB (Object Request Broker) se charge de localiser les objets, de les charger en mémoire et de transmettre au serveur les demandes du client (voir la Figure 9.5). Il assure ensuite des opérations de gestion ou de maintenance, comme la gestion des erreurs ou leur destruction. Dans cette architecture, l'application cliente ne se préoccupe pas des détails d'implémentation des objets serveurs, elle se contente de s'y connecter et de les utiliser. L'ORB prend en charge la communication entre les différents composants du système distribué.

Le dialogue Corba, entre le client, le serveur et l'ORB est décrit à la figure 9.5. Le cycle de développement CORBA est représenté à la figure 9.6.

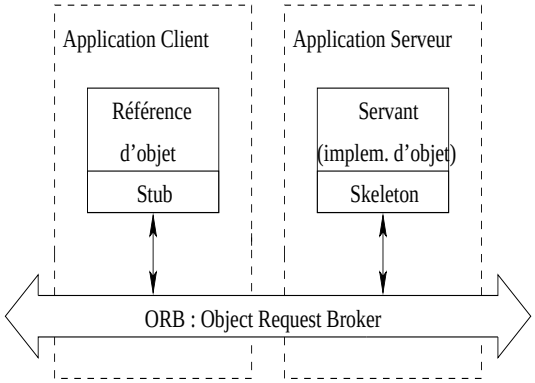


FIG. 9.5 – Le dialogue CORBA

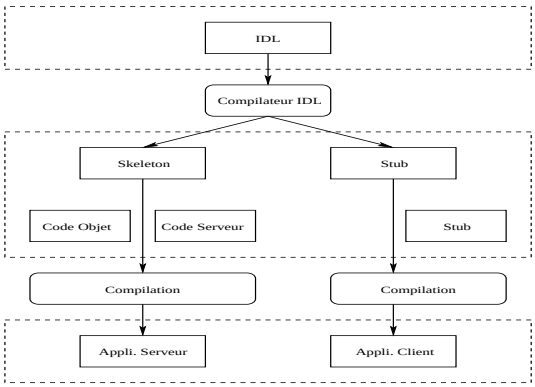


FIG. 9.6 – Le cycle de développement CORBA

On commence par écrire l'interface de l'objet en IDL. C'est-à-dire que l'on définit dans le langage de description d'interfaces Corba ("Interface Definition Language") des opérations disponibles sur l'objet. Ensuite, on compile l'IDL. Cela engendre des modules *stub* (pour le client) et *skeleton* (pour le serveur). Ces modules gèrent l'invocation des méthodes distantes. Enfin, on implémente l'objet. On dérive une classe à partir du squelette généré à l'étape précédente. Les données et méthodes de cette classe doivent correspondre à celles qui sont décrites dans l'IDL. Lors de l'appel des méthodes sur l'objet, le code défini sera exécuté par l'application serveur.

Ensuite, on rédige l'application serveur : ce code sert à initialiser l'objet et à le mettre à disposition des différentes applications clientes. On compile le serveur. Cela génère l'exécutable de l'application serveur. On réalise l'application cliente : cette application se connecte à l'objet distant pour lui demander d'exécuter des méthodes. Elle traite ensuite les données transmises par le serveur à l'issue de l'exécution des traitements distants. Enfin, on compile le client. Cela génère l'exécutable de l'application client.

Donnons un exemple de l'écriture de l'interface de l'objet en IDL :

```
interface Vecteur {
  typedef double vect[100]; // Definition du type vect
  attribute long size;      // size est un attribut
                            // de type long (entier)
  attribute vect T ;        // T est un attribut de
                            // type vect
  double maxElement();      // maxElement est une
                       // methode retournant un double
  void mult(in double a);   // mult est une methode
                            // prenant pour parametre
                            // un double transmis
};                         //par le client (mot cle in)
```

Comme on le voit dans cet exemple, les principaux types définis par le langage IDL sont `short` et `long` pour les entiers, `float` et `double` pour les flottants, `char` et `string` pour les caractères. Les types composés sont les tableaux ainsi que d'autres structures à l'aide des mots clés `enum`, `struct` ou `union`, etc.

Le mot clé `attribute` appartient au langage IDL, tout comme `in` qui indique le sens de passage du paramètre (du client vers le serveur). Symétriquement le type de passage des paramètres `out` permet de réaliser un passage par adresse : par exemple `void maxElement(out double m) ;` Le type `inout` peut être utilisé pour les paramètres devant être lus et écrits.

On compile l'interface IDL par la commande `idlj -fall Vecteur.idl`.

Les principaux fichiers qui sont générés sont les suivants :

- `VecteurOperations.java` : définition de l'interface qui contient la signature des méthodes de l'objet `Vecteur`.
- `Vecteur.java` : définition de l'interface `Vecteur` qui hérite de `VecteurOperations`.
- `VecteurHelper.java` : regroupe des méthodes destinées à vous aider lors de l'utilisation des objets `Vecteur`.
- `VecteurHolder.java` : outils pour prendre en charge le passage de paramètres avec les méthodes de l'objet `Vecteur`.
- `_VecteurStub.java` : stub de l'objet `Vecteur`. Cette classe sera utilisée dans le code de notre client de façon implicite, elle représentera l'objet distant en mettant à notre disposition les méthodes qui s'y trouvent.
- `_VecteurImplBase.java` : squelette de l'objet `Vecteur`. C'est la classe de base de notre futur objet `vecteur`. On en dérivera une classe pour coder le fonctionnement réel de notre objet.

L'implémentation de l'objet se fait en créant la classe de l'objet que nous souhaitons mettre à disposition : pour cela, on utilise le squelette généré précédemment.

la classe `VecteurImplem` que nous allons créer étendra la classe `_VecteurImplBase` produite par le compilateur IDL et implémentera les méthodes définies par l'interface `VecteurOperations.java` :

```
public class VecteurImplem extends _VecteurImplBase {
    private int size=100;
    private double T[];
    VecteurImplem(double[] Tab) {
        for(int i=0;i<size;i++) {
            T[i]=Tab[i]; } }

    VecteurImplem() {} ;

    public int size() {
        return size; }

    public void size(int newSize) {
        size = newSize; }

    public double[] T() {
        return T; }

    public void T(double[] newT) {
        for(int i=0;i<size;i++) {
            T[i]=newT[i]; } }

    public double maxElement () {
        double m = T[0];
        for (int i=1;i<size;i++) {
            if (T[i]>m) { m = T[i]; } };
        return m; }

    public void mult(double a) {
        for (int i=0;i<size;i++) {
            T[i]=T[i]*a; } } }
```

La classe implémentant l'objet qui nous intéresse doit implémenter toutes les méthodes définies par l'interface `VecteurOperations`. On doit donc déclarer en particulier les attributs définis dans l'interface IDL. Il faut naturellement définir les méthodes de création des objets de la classe. La méthode `maxElement` devra retourner l'élément maximal du vecteur et la méthode `mult` devra multiplier tous les éléments du vecteur par la valeur du paramètre.

Pour le serveur CORBA, nous allons créer une application hôte, qui contiendra l'objet `Vecteur` :

```
import org.omg.CosNaming.*;
import org.omg.CosNaming.NamingContextPackage.*;
import org.omg.CORBA.*;

public class VecteurServeur {
    public static void main(String args[]) {
        try{
  // Cree et initialise l'ORB
  ORB orb = ORB.init(args, null);
  // Cree le servant et l'enregistre sur l'ORB
  VecteurImplem vecteurRef = new VecteurImplem();
  orb.connect(vecteurRef);
  // Obtention de la reference du RootPOA
  org.omg.CORBA.Object objRef =
  orb.resolve_initial_references("NameService");
```

```
  NamingContext ncRef = NamingContextHelper.narrow(objRef);
  // Enregistre la reference de l'objet
  NameComponent nc = new NameComponent("Vecteur", "");
  NameComponent path[] = {nc};
  ncRef.rebind(path, vecteurRef);
  // attend les invocations de clients
  java.lang.Object sync = new java.lang.Object();
  synchronized (sync) {
  sync.wait(); }
  } catch (Exception e) {
      System.err.println("ERROR: " + e);
      e.printStackTrace(System.out); } } }
```

Les principales actions réalisées par le serveur sont, la création d'une instance de l'ORB, d'une instance du servant (l'implémentation d'un objet `Vecteur`) et son enregistrement sur l'ORB. On obtient ainsi une référence à un objet CORBA pour le nommage et pour y enregistrer le nouvel objet sous le nom "Vecteur". Le serveur attend ensuite l'invocation de méthodes de l'objet.

On pourra se reporter à
`http ://java.sun.com/j2se/1.4.2/docs/guide/corba/index.html`
pour plus de détails.

On a maintenant une application autonome qui, lors de son lancement, crée un objet `Vecteur` et le met à disposition des autres applications. Tout comme le serveur, le client devra initialiser l'ORB. Il pourra ensuite se connecter à l'objet et l'utiliser :

```
import org.omg.CosNaming.*;
import org.omg.CORBA.*;

public class VecteurClient {
  public static void main(String args[]) {
    try{
      // Cree et initialise l'ORB.
      ORB orb = ORB.init(args, null);
      // Obtention de la reference du RootPOA
      org.omg.CORBA.Object objRef =
        orb.resolve_initial_references("NameService");
      NamingContext ncRef = NamingContextHelper.narrow(objRef);
      // trouve la r\'ef\'erence \`a l'objet
      NameComponent nc = new NameComponent("Vecteur", "");
      NameComponent path[] = {nc};
      Vecteur vecteurRef = VecteurHelper.narrow
                           (ncRef.resolve(path));
      // Utilisation de l'objet
      ...
      } catch (Exception e) {
          System.out.println("ERROR : " + e) ;
          e.printStackTrace(System.out); } } }
```

Le client initialise ainsi l'ORB et obtient une référence au contexte de nommage. Il y recherche ensuite "Vecteur" et reçoit une référence de cet objet Corba. Il peut ensuite invoquer les méthodes de l'objet.

Pour plus de détails, on pourra se reporter à
`http ://java.sun.com/products/jdk/1.2/docs/guide/ idl/tutorial/GSapp.html`.

Maintenant on compile toutes les applications ainsi écrites :

```
javac *.java
```

Pour l'exécution, on procéde dans l'ordre suivant. On commence par initialiser le serveur de noms :

```
tnameserv -ORBInitialPort 1050
```

1050 est le port utilisé par le serveur. Sous Solaris par exemple, il faut être `root` pour utiliser un port inférieur à 1024. Ensuite on initialise le serveur par

```
java VecteurServer -ORBInitialHost namerserverhost -ORBInitialPort 1050
```

`nameserverhost` est le nom de la machine sur laquelle s'exécute le serveur de noms.

Enfin, on exécute le client par :

```
java VecteurClient -ORBInitialHost namerserverhost -ORBInitialPort 1050
```

Chapitre 10

Algèbre linéaire

Dans ce chapitre nous allons décrire quelques façons classiques de paralléliser certains calculs d'algèbre linéaire. Ceux-ci ont été particulièrement étudiés car de très nombreux codes scientifiques, requiérant une grande puissance de calcul, utilisent des calculs matriciels, de façon intensive.

10.1 Produit matrice-vecteur sur anneau

On cherche à calculer $y = Ax$, où A est une matrice de dimension $n \times n$, x est un vecteur à n composantes (de 0 à $n-1$), le tout sur un anneau de p processeurs, avec $r = n/p$ entier.

Le programme séquentiel est simple. En effet, le calcul du produit matrice-vecteur revient au calcul de n produits scalaires :

```
for (i=1;i<=n;i++)
  for (j=1;j<=n;j++)
    y[i] = y[i]+a[i,j]*x[j];
```

On essaie donc de distribuer le calcul des produits scalaires aux différents processeurs. Chaque processeur a en mémoire r lignes de la matrice `A` rangées dans une matrice `a` de dimension $r \times n$. Le processeur P_q contient les lignes qr à $(q+1)r-1$ de la matrice `A` et les composantes de même rang des vecteurs `x` et `y` :

```
float a[r][n];
float x[r],y[r];
```

Le programme distribué correspondant à la parallélisation de cet algorithme séquentiel est :

```
matrice-vecteur(A,x,y) {
  q = my_num();
  p = tot_proc_num();
  for (step=0;step<p;step++) {
    send(x,r);
    for (i=0;i<r;i++)
      for (j=0;j<r;j++)
        y[i] = y[i]+a[i,(q-step mod p)r+j]*x[j];
    receive(temp,r);
    x = temp;
  }
}
```

Donnons un exemple des différentes étapes (boucle extérieure, sur `step`), pour $n = 8$. La distribution initiale des données est donc comme suit :

$$
\begin{array}{l}
P_0 \quad \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{04} & A_{05} & A_{06} & A_{07} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} & A_{17} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \\
\hline
P_1 \quad \begin{pmatrix} A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} & A_{27} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} & A_{37} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
\hline
P_2 \quad \begin{pmatrix} A_{40} & A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} & A_{47} \\ A_{50} & A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} & A_{57} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \\
\hline
P_3 \quad \begin{pmatrix} A_{60} & A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} & A_{67} \\ A_{70} & A_{71} & A_{72} & A_{73} & A_{74} & A_{75} & A_{76} & A_{77} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

A la première étape, chacun des $p = 4$ processeurs considère les sous-matrices suivantes :

$$
\begin{array}{l}
P_0 \quad \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ A_{10} & A_{11} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad temp \leftarrow \begin{pmatrix} x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} \\
\hline
P_1 \quad \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & A_{22} & A_{23} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & A_{32} & A_{33} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad temp \leftarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \\
\hline
P_2 \quad \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & A_{44} & A_{45} & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & A_{54} & A_{55} & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad temp \leftarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
\hline
P_3 \quad \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & A_{66} & A_{67} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & A_{76} & A_{77} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} \quad temp \leftarrow \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

A la deuxième étape, les processeurs ont en mémoire les sous-matrices suivantes :

$$
\begin{array}{l}
P_0 \quad \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & A_{06} & A_{07} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & A_{16} & A_{17} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} \quad temp \leftarrow \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \\
\hline
P_1 \quad \begin{pmatrix} A_{20} & A_{21} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ A_{30} & A_{31} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad temp \leftarrow \begin{pmatrix} x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} \\
\hline
P_2 \quad \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & A_{42} & A_{43} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & A_{52} & A_{53} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad temp \leftarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \\
\hline
P_3 \quad \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & A_{64} & A_{65} & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & A_{74} & A_{75} & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad temp \leftarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Puis à la troisième étape :

$$
\begin{array}{l}
P_0 \quad \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & A_{04} & A_{05} & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & A_{14} & A_{15} & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad temp \leftarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
\hline
P_1 \quad \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & A_{26} & A_{27} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & A_{36} & A_{37} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} \quad temp \leftarrow \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \\
\hline
P_2 \quad \begin{pmatrix} A_{40} & A_{41} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ A_{50} & A_{51} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad temp \leftarrow \begin{pmatrix} x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} \\
\hline
P_3 \quad \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & A_{62} & A_{63} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & A_{72} & A_{73} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad temp \leftarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Enfin à la quatrième étape :

$$P_0 \quad \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & A_{02} & A_{03} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & A_{12} & A_{13} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad temp \leftarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$P_1 \quad \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & A_{24} & A_{25} & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & A_{34} & A_{35} & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad temp \leftarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$P_2 \quad \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & A_{46} & A_{47} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & A_{56} & A_{57} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} \quad temp \leftarrow \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$P_3 \quad \begin{pmatrix} A_{60} & A_{61} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ A_{70} & A_{71} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad temp \leftarrow \begin{pmatrix} x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}$$

En notant τ_a le temps de calcul élémentaire, τ_c le temps de communication élémentaire, on se propose d'estimer le temps de calcul de cet algorithme, donc de mesurer ses performances.

Il y a p étapes identiques dans cet algorithme, chacune de temps égal au temps le plus long parmi le temps de calcul local et le temps de communication : $max(r^2\tau_a, \beta + r\tau_c)$. On obtient donc un temps total de $p * max(r^2\tau_a, \beta + r\tau_c)$. Quand n est assez grand, $r^2\tau_a$ devient prépondérant, d'où asympotiquement un temps de $\frac{n^2}{p}\tau_a$. C'est-à-dire que asymptotiquement, l'efficacité tend vers 1 !

Remarquez que l'on aurait aussi pu procéder à un échange total de `x` au début.

10.2 Factorisation LU

On cherche maintenant à résoudre un système linéaire dense $Ax = b$ par triangulation de Gauss. Un programme séquentiel qui implémente cela est :

```
for (k=0;k<n-1;k++) {
  prep(k): for (i=k+1;i<n;i++)
    a[i,k]=a[i,k]/a[k,k];
  for (j=k+1;j<n;j++)
    update(k,j): for (i=k+1;i<n;i++)
      a[i,j]=a[i,j]-a[i,k]*a[k,j];
}
```

On le parallélise en distribuant les colonnes aux différents processeurs. On va supposer que cette distribution nous est donnée par une fonction `alloc` telle que `alloc(k)=q` veut dire que la $k$ième colonne est affectée à la mémoire locale de P_q. On utilisera la fonction `broadcast`, pour faire en sorte qu'à l'étape k, le processeur qui possède la colonne k la diffuse à tous les autres.

On va supposer dans un premier temps que `alloc(k)=k`. On obtient alors :

```
q = my_num();
p = tot_proc_num();
for (k=0;k<n-1;k++) {
  if (k == q) {
    prep(k): for (i=k+1;i<n;i++)
      buffer[i-k-1] = a[i,k]/a[k,k];
    broadcast(k,buffer,n-k);
  }
  else {
      receive(buffer,n-k);
      update(k,q): for (i=k+1;k<n;k++)
        a[i,q] = a[i,q]-buffer[i-k-1]*a[k,q]; }
}
```

Dans le cas plus général, il faut gérer les indices dans les blocs de colonnes. Maintenant chaque processeur gère $r = n/p$ colonnes, avec des indices locaux :

```
q = my_num();
p = tot_proc_num();
l = 0;
for (k=0;k<n-1;k++) {
  if (alloc(k) == q) {
    prep(k): for (i=k+1;i<n;i++)
      buffer[i-k-1] = a[i,l]/a[k,l];
    l++; }
  broadcast(alloc(k),buffer,n-k);
  for (j=l;j<r;j++)
    update(k,j): for (i=k+1;k<n;k++)
      a[i,j] = a[i,j]-buffer[i-k-1]*a[k,j]; }
```

Cet algorithme présente néanmoins un certain nombre de défauts. Premièrement, le nombre de données varie au cours des étapes (il y en a de moins en moins). Ensuite, le volume de calcul n'est pas proportionnel au volume des données : quand un processeur a par exemple `r` colonnes consécutives, le dernier processeur a moins de calcul (que de données) par rapport au premier. Il faudrait donc trouver une fonction d'allocation qui réussisse à équilibrer le volume des données et du travail ! Cet équilibrage de charge doit être réalisé à chaque étape de l'algorithme, et pas seulement de façon globale.

10.2.1 Cas de l'allocation cyclique par lignes

Pour $p = 4$, et $n = 8$ on a la répartition initiale des données comme suit :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & P_0 & P_1 & P_2 & P_3 \\ \hline A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{04} & A_{05} & A_{06} & A_{07} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} & A_{17} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} & A_{27} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} & A_{37} \\ A_{40} & A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} & A_{47} \\ A_{50} & A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} & A_{57} \\ A_{60} & A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} & A_{67} \\ A_{70} & A_{71} & A_{72} & A_{73} & A_{74} & A_{75} & A_{76} & A_{77} \end{array}\right)$$

A `k=0` :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} P_0 : p_0; b & P_1 & P_2 & P_3 & P_0 & P_1 & P_2 & P_3 \\ \hline U_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{04} & A_{05} & A_{06} & A_{07} \\ L_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} & A_{17} \\ L_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} & A_{27} \\ L_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} & A_{37} \\ L_{40} & A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} & A_{47} \\ L_{50} & A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} & A_{57} \\ L_{60} & A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} & A_{67} \\ L_{70} & A_{71} & A_{72} & A_{73} & A_{74} & A_{75} & A_{76} & A_{77} \end{array}\right)$$

Puis, toujours à `k=0` :

$P_1 : r; u_{0,1}$	$P_2 : r; u_{0,2}$	$P_3 : r; u_{0,3}$	$P_0 : u_{0,4}$	P_1	P_2	P_3	
U_{00}	U_{01}	U_{02}	U_{03}	U_{04}	A_{05}	A_{06}	A_{07}
L_{10}	A'_{11}	A'_{12}	A'_{13}	A'_{14}	A_{15}	A_{16}	A_{17}
L_{20}	A'_{21}	A'_{22}	A'_{23}	A'_{24}	A_{25}	A_{26}	A_{27}
L_{30}	A'_{31}	A'_{32}	A'_{33}	A'_{34}	A_{35}	A_{36}	A_{37}
L_{40}	A'_{41}	A'_{42}	A'_{43}	A'_{44}	A_{45}	A_{46}	A_{47}
L_{50}	A'_{51}	A'_{52}	A'_{53}	A'_{54}	A_{55}	A_{56}	A_{57}
L_{60}	A'_{61}	A'_{62}	A'_{63}	A'_{64}	A_{65}	A_{66}	A_{67}
L_{70}	A'_{71}	A'_{72}	A'_{73}	A'_{74}	A_{75}	A_{76}	A_{77}

Ensuite :

P_0	P_1	P_2	P_3	P_0	$P_1 : r; u_{0,5}$	$P_2 : r; u_{0,6}$	$P_3 : r; u_{0,7}$
U_{00}	U_{01}	U_{02}	U_{03}	U_{04}	U_{05}	U_{06}	U_{07}
L_{10}	A'_{11}	A'_{12}	A'_{13}	A'_{14}	A'_{15}	A'_{16}	A'_{17}
L_{20}	A'_{21}	A'_{22}	A'_{23}	A'_{24}	A'_{25}	A'_{26}	A'_{27}
L_{30}	A'_{31}	A'_{32}	A'_{33}	A'_{34}	A'_{35}	A'_{36}	A'_{37}
L_{40}	A'_{41}	A'_{42}	A'_{43}	A'_{44}	A'_{45}	A'_{46}	A'_{47}
L_{50}	A'_{51}	A'_{52}	A'_{53}	A'_{54}	A'_{55}	A'_{56}	A'_{57}
L_{60}	A'_{61}	A'_{62}	A'_{63}	A'_{64}	A'_{65}	A'_{66}	A'_{67}
L_{70}	A'_{71}	A'_{72}	A'_{73}	A'_{74}	A'_{75}	A'_{76}	A'_{77}

Maintenant, quand `k=1` :

P_0	$P_1 : p_1; b$	P_2	P_3	P_0	P_1	P_2	P_3
U_{00}	U_{01}	U_{02}	U_{03}	U_{04}	U_{05}	U_{06}	U_{07}
L_{10}	U_{11}	A'_{12}	A'_{13}	A'_{14}	A'_{15}	A'_{16}	A'_{17}
L_{20}	L_{21}	A'_{22}	A'_{23}	A'_{24}	A'_{25}	A'_{26}	A'_{27}
L_{30}	L_{31}	A'_{32}	A'_{33}	A'_{34}	A'_{35}	A'_{36}	A'_{37}
L_{40}	L_{41}	A'_{42}	A'_{43}	A'_{44}	A'_{45}	A'_{46}	A'_{47}
L_{50}	L_{51}	A'_{52}	A'_{53}	A'_{54}	A'_{55}	A'_{56}	A'_{57}
L_{60}	L_{61}	A'_{62}	A'_{63}	A'_{64}	A'_{65}	A'_{66}	A'_{67}
L_{70}	L_{71}	A'_{72}	A'_{73}	A'_{74}	A'_{75}	A'_{76}	A'_{77}

Puis, toujours à `k=1` :

P_0	P_1	$P_2 : r; u_{1,2}$	$P_3 : r; u_{1,3}$	$P_0 : r; u_{1,4}$	P_1	P_2	P_3
U_{00}	U_{01}	U_{02}	U_{03}	U_{04}	U_{05}	U_{06}	U_{07}
L_{10}	U_{11}	U_{12}	U_{13}	U_{14}	A'_{15}	A'_{16}	A'_{17}
L_{20}	L_{21}	A''_{22}	A''_{23}	A''_{24}	A'_{25}	A'_{26}	A'_{27}
L_{30}	L_{31}	A''_{32}	A''_{33}	A''_{34}	A'_{35}	A'_{36}	A'_{37}
L_{40}	L_{41}	A''_{42}	A''_{43}	A''_{44}	A'_{45}	A'_{46}	A'_{47}
L_{50}	L_{51}	A''_{52}	A''_{53}	A''_{54}	A'_{55}	A'_{56}	A'_{57}
L_{60}	L_{61}	A''_{62}	A''_{63}	A''_{64}	A'_{65}	A'_{66}	A'_{67}
L_{70}	L_{71}	A''_{72}	A''_{73}	A''_{74}	A'_{75}	A'_{76}	A'_{77}

Faisons un calcul de complexité dans le cas particulier `p=n`. Donc, ici, `alloc(k)==k`.

Le coût de la mise à jour (`update`) de la colonne j par le processeur j est de $n-k-1$ pour l'étape k (éléments en position $k+1$ à $n-1$). Ceci étant fait pour toutes les étapes $k=0$ à $k=n-1$. D'où un coût total de

$$t = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k-1)\tau_a = \frac{n(n-1)}{2}\tau_a$$

Pour ce qui est du temps de calcul ; le chemin critique d'exécution est :

$$prep_0(0) \to update_1(0,1), prep_1(1) \to update_2(1,2), prep_2(2) \to \ldots$$

C'est comme si on faisait environ r fois le travail dans le cas d'une allocation cyclique pour $r = \frac{n}{p}$ processeurs. Remarquez que l'on obtient bien un recouvrement des communications, mais pas entre les communications et le calcul ! C'est ce que l'on va améliorer dans la prochaine version de l'algorithme distribué.

On a donc les coûts suivants : $n\beta + \frac{n^2}{2}\tau_c + O(1)$ pour les $n-1$ communications (transportant de l'ordre de n^2 données), $\frac{n^2}{2}\tau_a + O(1)$ pour les `prep` et pour l'`update` des r colonnes sur le processeur $j \ mod \ p$, en parallèle sur tous les processeurs, environ $r\frac{n(n-1)}{2}$. On obtient donc un coût final de l'ordre de $\frac{n^3}{2p}$ pour les `update` des p processeurs : c'est le terme dominant si $p << n$ et l'efficacité est excellente asymptotiquement (pour n grand).

10.2.2 Recouvrement communication/calcul

On peut décomposer le `broadcast` afin de réaliser un meilleur recouvrement entre les communications et le calcul, comme suit :

```
q = my_num();
p = tot_proc_num();
l = 0;
for (k=0;k<n-1;k++) {
  if (k == q mod p) {
    prep(k): for (i=k+1;i<n;i++)
      buffer[i-k-1] = -a[i,l]/a[k,l];
    l++; send(buffer,n-k); }
  else { receive(buffer,n-k);
    if (q != k-1 mod p) send(buffer,n-k); }
  for (j=l;j<r;j++)
    update(k,j): for (i=k+1;k<n;k++)
      a[i,j] = a[i,j]+buffer[i-k-1]*a[k,j]; }
```

Il reste néanmoins un défaut. Regardons ce qui se passe sur P_1 :

- A l'étape $k = 0$: P_1 reçoit la colonne pivot 0 de P_0
- P_1 l'envoit à P_2
- Fait `update(0,j)` pour toutes les colonnes j qui lui appartiennent, c'est-à-dire $j = 1 \ mod \ p$
- A l'étape $k = 1$: fait `prep(1)`
- Envoie la colonne pivot 1 à P_2
- Fait `update(1,j)` pour toutes les colonnes j qui lui appartiennent, c'est-à-dire $j = 1 \ mod \ p$
- etc.

On obtient donc les actions en parallèle suivantes, au cours du temps :

P_0	P_1	P_2	P_3
$prep(0)$			
$send(0)$	$receive(0)$		
$update(0,4)$	$send(0)$	$receive(0)$	
$update(0,8)$	$update(0,1)$	$send(0)$	$receive(0)$
$update(0,12)$	$update(0,5)$	$update(0,2)$	$update(0,3)$
	$update(0,9)$	$update(0,6)$	$update(0,7)$
	$update(0,13)$	$update(0,10)$	$update(0,11)$
	$prep(1)$	$update(0,14)$	$update(0,15)$
	$send(1)$	$receive(1)$	
	$update(1,5)$	$send(1)$	$receive(1)$
$receive(1)$	$update(1,9)$	$update(1,2)$	$send(1)$
$update(1,4)$	$update(1,13)$	$update(1,6)$	$update(1,3)$
$update(1,8)$		$update(1,10)$	$update(1,7)$
$update(1,12)$		$update(1,14)$	$update(1,11)$
...	...	...	...

Alors que P_1 aurait pu faire :
- `update(0,1)`
- `prep(1)`
- Envoi vers P_2
- `update(0,j)` pour $j = 1 \ mod \ p$ et $j > 1$
- etc.

Et on obtiendrait, toujours sur quatre processeurs :

P_0	P_1	P_2	P_3
$prep(0)$			
$send(0)\|\|up(0,4)$	$receive(0)$		
$up(0,8)$	$send(0)\|\|up(0,1)$	$receive(0)$	
$up(0,12)$	$prep(1)$	$send(0)\|\|up(0,2)$	$receive(0)$
	$send(1)\|\|up(0,5)$	$receive(1)\|\|up(0,6)$	$up(0,3)$
	$up(0,9)$	$send(1)\|\|up(0,10)$	$receive(1)\|\|up(0,7)$
$receive(1)$	$up(0,13)$	$up(0,14)$	$send(1)\|\|up(0,11)$
$up(1,4)$	$up(1,5)$	$up(1,2)$	$up(0,15)$
$up(1,8)$	$up(1,9)$	$prep(2)$	$up(1,3)$
$up(1,12)$	$up(1,13)$	$send(2)\|\|up(1,6)$	$receive(2)\|\|up(1,7)$
$receive(2)$		$up(1,10)$	$send(2)\|\|up(1,11)$
$send(2)\|\|up(2,4)$	$receive(2)$	$up(1,14)$	$up(1,15)$
...	...	...	...

Ce qui est bien mieux !

10.3 Algorithmique sur grille 2D

On va maintenant examiner trois algorithmes classiques de produit de matrices sur une grille 2D, les algorithmes de Cannon, de Fox, et de Snyder.

On cherche donc à calculer $C = C + AB$, avec A, B et C de taille $N \times N$. Soit $p = q^2$: on dispose d'une grille de processeurs en tore de taille $q \times q$. On distribue les matrices par blocs : P_{ij} stocke A_{ij}, B_{ij} et C_{ij}.

La distribution des données peut se faire, par blocs, et/ou de façon cyclique. La distribution par blocs permet d'augmenter le grain de calcul et d'améliorer l'utilisation des mémoires hiérarchiques. La distribution cyclique, elle, permet de mieux équilibrer la charge.

On définit maintenant une distribution cyclique par blocs, de façon générale. On suppose que l'on souhaite répartir un vecteur à M composantes sur p processeurs, à chaque entrée $0 \leq m <$

M on va associer trois indices, le numéro de processeur $0 \leq q < p$ sur lequel se trouve cette composante, le numéro de bloc b et l'indice i dans ce bloc :

$$m \quad \rightarrow \quad (q, b, i) = \left(\lfloor \frac{m \bmod T}{r} \rfloor, \lfloor \frac{m}{T} \rfloor, m \bmod r \right)$$

où r est la taille de bloc et $T = rp$.

Par exemple, un réseau linéaire par blocs (4 processeurs) avec $M = 8$, $p = 4$, et $r = 8$ (pour chaque colonne) donnerait la répartition suivante :

0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	3	3

0u encore, un réseau linéaire cyclique (4 processeurs) avec $M = 8$, $p = 4$, $r = 4$ (pour chaque colonne) donnerait :

0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3

Autre exemple, un réseau en grille 2D par blocs (4×4 processeurs) avec $M = 8$, $p = 4$, $r = 8$ en ligne et en colonne, donnerait :

0.0	**0.0**	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3	0.3
0.0	**0.0**	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3	0.3
1.0	1.0	1.1	1.1	1.2	1.2	1.3	1.3
1.0	1.0	1.1	1.1	1.2	1.2	1.3	1.3
2.0	2.0	2.1	2.1	2.2	2.2	2.3	2.3
2.0	2.0	2.1	2.1	2.2	2.2	2.3	2.3
3.0	3.0	3.1	3.1	3.2	3.2	3.3	3.3
3.0	3.0	3.1	3.1	3.2	3.2	3.3	3.3

Enfin, dernier exemple, un réseau en grille 2D par blocs cycliques, avec $M = 8$, $p = 4$, $r = 4$ en ligne et en colonne :

0.0	0.1	0.2	0.3	**0.0**	0.1	0.2	0.3
1.0	1.1	1.2	1.3	1.0	1.1	1.2	1.3
2.0	2.1	2.2	2.3	2.0	2.1	2.2	2.3
3.0	3.1	3.2	3.3	3.0	3.1	3.2	3.3
0.0	0.1	0.2	0.3	**0.0**	0.1	0.2	0.3
1.0	1.1	1.2	1.3	1.0	1.1	1.2	1.3
2.0	2.1	2.2	2.3	2.0	2.1	2.2	2.3
3.0	3.1	3.2	3.3	3.0	3.1	3.2	3.3

En pratique, les fonctions de calcul de produit matriciel (ou autres fonctions qu'on voudrait typiquement mettre dans une librairie de calcul distribué) peuvent se faire en version centralisée ou

distribuée. Dans la version centralisée, les routines sont appelées avec les données et les résultats sur la machine hôte. Cette version permet de minimiser le nombre de fonctions à écrire, et permet de choisir la distribution des données la plus adaptée. Mais, elle a un coût prohibitif si on enchaîne les appels.

Dans la version distribuée au contraire, les données sont déjà distribuées, et le résultat l'est également. Le passage à l'échelle est donc plus facile à obtenir, par des fonctions de redistribution des données. Mais il y a un compromis à trouver entre le coût de redistribution plus le coût de l'algorithme avec rangement adapté, avec le coût de l'algorithme avec un rangement non-adapté.

De façon générale, la redistribution des données est parfois incontournable, avec des coûts potentiellement dissuasifs. Par exemple, si on dispose d'une FFT 1D, programmer une FFT 2D peut se faire en enchaînant les calculs sur les lignes d'une matrice, puis sur les colonnes de la matrice ainsi obtenue (ou l'inverse). Chacune des étapes est parfaitement parallèle, car le calcul des FFT 1D sur l'ensemble des lignes peut se faire avec une efficacité 1, en allouant une ligne (ou plus généralement un paquet de lignes) par processeur. Par contre, quand on veut faire la même chose ensuite par colonne, il faut calculer la transposée de la matrice, ou dit de façon plus prosaïque, il faut réorganiser la matrice, afin qu'à chaque processeur soit maintenant associé une colonne, ou un paquet de colonnes en général. Ceci implique une diffusion globale qui peut être extrêmement couteuse, et arriver aux limites de la contention du réseau, ou du bus de données interne.

Prenons un exemple pour le reste des explications algorithmiques de cette section. On va supposer $n = 4$, et $C = 0$. On cherche donc à calculer :

$$\begin{pmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}$$

10.3.1 Principe de l'algorithme de Cannon

Le pseudo-code pour l'algorithme de Cannon est :

```
/* diag(A) sur col 0, diag(B) sur ligne 0 */
Rotations(A,B); /* preskewing */

/* calcul du produit de matrice */
forall (k=1; k<=sqrt(P)) {
  LocalProdMat(A,B,C);
  VerticalRotation(B,upwards);
  HorizontalRotation(A,leftwards); }

/* mouvements des donnees apres les calculs */
Rotations(A,B); /* postskewing */
```

Expliquons sur notre exemple comment l'algorithme de Cannon fonctionne. On commence par effectuer un "preskewing", pour obtenir les allocations des données suivantes :

$$\begin{pmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{10} \\ A_{22} & A_{23} & A_{20} & A_{21} \\ A_{33} & A_{30} & A_{31} & A_{32} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{00} & B_{11} & B_{22} & B_{33} \\ B_{10} & B_{21} & B_{32} & B_{03} \\ B_{20} & B_{31} & B_{02} & B_{13} \\ B_{30} & B_{01} & B_{12} & B_{23} \end{pmatrix}$$

Puis on fait une rotation sur A et B :

$$\begin{pmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{00} \\ A_{12} & A_{13} & A_{10} & A_{11} \\ A_{23} & A_{20} & A_{21} & A_{22} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{10} & B_{21} & B_{32} & B_{03} \\ B_{20} & B_{31} & B_{02} & B_{13} \\ B_{30} & B_{01} & B_{12} & B_{23} \\ B_{00} & B_{11} & B_{22} & B_{33} \end{pmatrix}$$

10.3.2 Principe de l'algorithme de Fox

Dans cet algorithme, on ne fait pas de mouvement de données initiales. On effectue des diffusions horizontales des diagonales de A (décalées vers la droite à chaque itération) et des rotations verticales de B (de bas en haut) :

```
/* pas de mouvements de donnees avant les calculs */

/* calcul du produit de matrices */
broadcast(A(x,x));
forall (k=1; k<sqrt(P)) {
  LocalProdMat(A,B,C);
  VerticalRotation(B,upwards);
  broadcast(A(k+x,k+x)); }

  LocalProdMat(A,B,C);
  VerticalRotation(B,upwards);

/* pas de mouvements de donnees apres les calculs */
```

Par exemple, toujours pour $n = 4$:

$$\begin{pmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} += \begin{pmatrix} A_{00} & A_{00} & A_{00} & A_{00} \\ A_{11} & A_{11} & A_{11} & A_{11} \\ A_{22} & A_{22} & A_{22} & A_{22} \\ A_{33} & A_{33} & A_{33} & A_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}$$

Puis :

$$\begin{pmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} += \begin{pmatrix} A_{01} & A_{01} & A_{01} & A_{01} \\ A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} \\ A_{23} & A_{23} & A_{23} & A_{23} \\ A_{30} & A_{30} & A_{30} & A_{30} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \\ B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \end{pmatrix}$$

10.3.3 Principe de l'algorithme de Snyder

On effectue une transposition préalable de B. Puis, on fait à chaque étape des sommes globales sur les lignes de processeurs (des produits calculés à chaque étape). On accumule les résultats sur les diagonales (décalées à chaque étape vers la droite) de C - représentées en gras dans les figures ci-après. Enfin, on fait des rotations verticales de B (de bas en haut, à chaque étape) :

```
/* mouvements des donnees avant les calculs */
Transpose(B);
/* calcul du produit de matrices */
forall () {
  LocalProdMat(A,B,C);
  VerticalRotation(B,upwards); }
```

```
forall (k=1;k<sqrt(P)) {
  GlobalSum(C(i,(i+k-1) mod sqrt(P)));
  LocalProdMat(A,B,C);
  VerticalRotation(B,upwards); }
GlobalSum(C(i,(i+sqrt(P)-1) mod sqrt(P)));
/* mouvements des donnees apres les calculs */
Transpose(B);
```

La encore, les premières étapes sont, pour $n = 4$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C_{00}} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & \mathbf{C_{11}} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & \mathbf{C_{22}} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & \mathbf{C_{33}} \end{pmatrix} += \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{00} & B_{10} & B_{20} & B_{30} \\ B_{01} & B_{11} & B_{21} & B_{31} \\ B_{02} & B_{12} & B_{22} & B_{32} \\ B_{03} & B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{pmatrix}$$

Puis :

$$\begin{pmatrix} C_{00} & \mathbf{C_{01}} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & \mathbf{C_{11}} & \mathbf{C_{12}} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & \mathbf{C_{22}} & \mathbf{C_{23}} \\ \mathbf{C_{30}} & C_{31} & C_{32} & \mathbf{C_{33}} \end{pmatrix} += \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \\ B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \end{pmatrix}$$

10.4 Algorithmique hétérogène

Nous avons supposé jusqu'à présent que les différents processus parallèles s'exécutent sur des processeurs qui ont exactement la même puissance de calcul. En général, sur un cluster de PC, ce ne sera pas le cas : certaines seront plus rapides que d'autres. On va voir maintenant comment faire en sorte de répartir au mieux le travail dans une telle situation.

On va considérer le problème suivant d'allocation statique de tâches. On suppose que l'on se donne $t_1, t_2, \ldots, t_p$ les temps de cycle des processeurs, et que l'on a B tâches identiques et indépendantes que l'on veut exécuter au mieux sur ces p processeurs. Le principe est que l'on va essayer d'assurer $c_i \times t_i = constante$, donc on trouve :

$$c_i = \left\lfloor \frac{\frac{1}{t_i}}{\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{t_k}} \right\rfloor \times B$$

L'algorithme correspondant, qui calcule au mieux ces c_i est le suivant :

```
Distribute(B,t1,t2,...,tn)
/* initialisation: calcule ci */
for (i=1;i<=p;i++)
  c[i]=...
/* incrementer iterativement les ci minimisant le temps */
while (sum(c[])<B) {
  find k in {1,...,p} st t[k]*(c[k]+1)=min{t[i]*(c[i]+1)};
  c[k] = c[k]+1;
return(c[]);
```

On peut aussi programmer une version incrémentale de cet algorithme. Le problème que résoud cet algorithme est plus complexe : on souhaite faire en sorte que l'allocation soit optimale pour tout nombre d'atomes entre 1 et B. Ceci se réalise par programmation dynamique. Dans la suite, on donnera des exemples avec $t_1 = 3$, $t_2 = 5$ et $t_3 = 8$. L'algorithme est alors :

```
Distribute(B,t1,t2,...tp)
/* Initialisation: aucune tache a distribuer m=0 */
for (i=1;i<=p;i++) c[i]=0;
/* construit iterativement l'allocation sigma */
for (m=1;m<=B;m++)
  find(k in {1,...p} st t[k]*(c[k]+1)=min{t[i]*(c[i]+1)});
  c[k]=c[k]+1;
  sigma[m]=k;
return(sigma[],c[]);
```

Par exemple, pour les valeurs de t_1, t_2 et t_3 données plus haut, on trouve :

$\#atomes$	c_1	c_2	c_3	$cout$	$proc.sel.$	$alloc.\sigma$
0	0	0	0		1	
1	1	0	0	3	2	$\sigma[1] = 1$
2	1	1	0	2.5	1	$\sigma[2] = 2$
3	2	1	0	2	3	$\sigma[3] = 1$
4	2	1	1	2	1	$\sigma[4] = 3$
5	3	1	1	1.8	2	$\sigma[5] = 1$
...						
9	5	3	1	1.67	3	$\sigma[9] = 2$
10	5	3	2	1.6		$\sigma[10] = 3$

10.4.1 LU hétérogène (1D)

A chaque étape, le processeur qui possède le bloc pivot le factorise et le diffuse. Les autres processeurs mettent à jour les colonnes restantes. A l'étape suivante le bloc des b colonnes suivantes devient le pivot. Ainsi de suite : la taille des données passe de $(n-1) \times b$ à $(n-2) \times b$ etc.

On a plusieurs solutions pour réaliser l'allocation statique équilibrant les charges. On peut redistribuer les colonnes restant à traiter à chaque étape entre les processeurs : le problème devient alors le coût des communications. On peut également essayer de trouver une allocation statique permettant un équilibrage de charges à chaque étape.

On peut ainsi distribuer B tâches sur p processeurs de temps de cycle t_1, t_2 etc. t_p de telle manière à ce que pour tout $i \in \{2, \ldots, B\}$, le nombre de blocs de $\{i, \ldots, B\}$ que possède chaque processeur P_j soit approximativement inversement proportionnel à t_j.

On alloue alors les blocs de colonnes périodiquement, dans motif de largeur B. B est un paramètre, par exemple si la matrice est $(nb) \times (nb)$, $B = n$ (mais le recouvrement calcul communication est meilleur si $B << n$). On utilise l'algorithme précédent en sens inverse : le bloc de colonne $1 \leq k \leq B$ est alloué sur $\sigma(B - k + 1)$. Cette distribution est quasi-optimale pour tout sous-ensemble $[i, B]$ de colonnes.

Par exemple, pour $n = B = 10$, $t_1 = 3$, $t_2 = 5$, $t_3 = 8$ le motif sera :

P_3	P_2	P_1	P_1	P_2	P_1	P_3	P_1	P_2	P_1

10.4.2 Allocation statique 2D

Prenons l'exemple de la multiplication de matrices sur une grille homogène. ScaLAPACK opère par un algorithme par blocs, avec une double diffusion horizontale et verticale (comme à la figure 10.1). Cela s'adapte au cas de matrices et de grilles. Il n'y a aucune redistribution initiale des données.

Essayons d'allouer des blocs inhomogènes, mais de façon "régulière". Le principe est d'allouer des rectangles de tailles différentes aux processeurs, en fonction de leur vitesse relative. Supposons que l'on ait $p \times q$ processeurs $P_{i,j}$ de temps de cycle $t_{i,j}$. L'équilibrage de charge parfait n'est

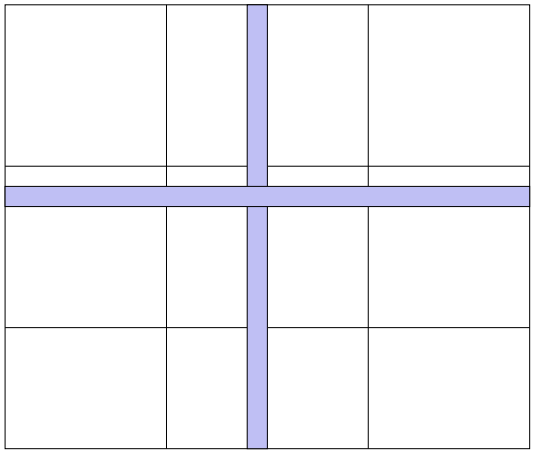


FIG. 10.1 – Diffusion horizontale et verticale, pour la multiplication de matrices sur une grille homogène

réalisable que si la matrice des temps de cycle $T = (t_{i,j})$ est de rang 1. Par exemple, dans la matrice de rang 2 suivante, $P_{2,2}$ est partiellement inactif :

	1	$\frac{1}{2}$
1	$t_{11} = 1$	$t_{12} = 2$
$\frac{1}{3}$	$t_{21} = 3$	$t_{22} = 5$

Par contre, dans le cas d'une matrice de rang 1 comme ci-dessus, on arrive à effectuer un équilibrage parfait :

	1	$\frac{1}{2}$
1	$t_{11} = 1$	$t_{12} = 2$
$\frac{1}{3}$	$t_{21} = 3$	$t_{22} = 6$

Le problème général revient à optimiser :

– Objectif $Obj1$:

$$min_{\sum_i r_i=1;\sum_j c_j=1} max_{i,j}\{r_i \times t_{i,j} \times c_j\}$$

– Objectif $Obj2$:

$$max_{r_i \times t_{i,j} \times c_j \leq 1} \left\{ \left(\sum_i r_i \right) \times \left(\sum_j c_j \right) \right\}$$

De plus, l'hypothèse de régularité que nous avions faite, ne tient pas forcément. En fait, la position des processeurs dans la grille n'est pas une donnée du problème. Toutes les permutations sont possibles, et il faut chercher la meilleure. Ceci nous amène à un problème NP-complet. En conclusion : l'équilibrage 2D est extrêmement difficile !

10.4.3 Partitionnement libre

Comment faire par exemple avec p (premier) processeurs, comme à la figure 10.2 ?
On suppose que l'on a p processeurs de vitesses $s_1, s_2, \ldots, s_n$ de somme 1 (normalisées). On veut partitionner le carré unité en p rectangles de surfaces $s_1, s_2, \ldots, s_n$. La surface des rectangles représente la vitesse relative des processeurs. La forme des rectangles doit permettre de minimiser les communications.

Géométriquement, on essaie donc de partitionner le carré unité en p rectangles d'aires fixées s_1, s_2, …, s_p afin de minimiser soit la somme des demi-périmètres des rectangles dans le cas des

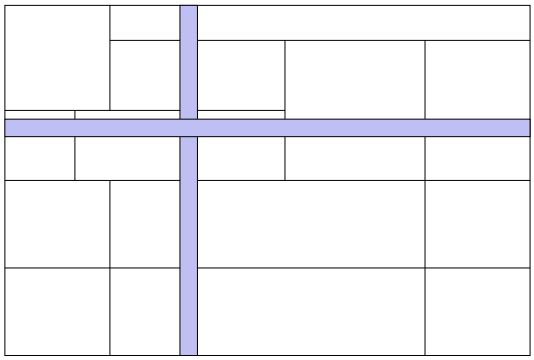


FIG. 10.2 – Problème de la partition libre

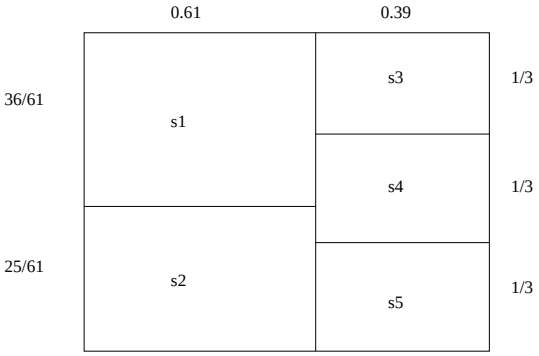


FIG. 10.3 – Problème de la partition libre

communications séquentielles, soit le plus grand des demi-périmètres des rectangles dans le cas de communications parallèles. Ce sont deux problèmes NP-complets.

Prenons un exemple pour bien mesurer la difficulté du partitionnement libre : supposons que l'on ait $p = 5$ rectangles $R_1, \ldots, R_5$ dont les aires sont $s_1 = 0.36$, $s_2 = 0.25$, $s_3 = s_4 = s_5 = 0.13$ (voir figure 10.3).

Alors, le demi-périmètre maximal pour R_1 est approximativement de 1.2002. La borne inférieure absolue $2\sqrt{s_1} = 1.2$ est atteinte lorsque le plus grand rectangle est un carré, ce qui n'est pas possible ici. La somme des demi-périmètres est de 4.39. La borne absolue inférieure $\sum_{i=1}^{p} 2\sqrt{s_i} = 4.36$ est atteinte lorsque tous les rectangles sont des carrés.

Chapitre 11

Systèmes tolérants aux pannes

Peut on "implémenter" certaines fonctions sur une architecture distribuée donnée, même si des processeurs peuvent tomber en panne ?

En fait, la réponse dépend assez finement de l'architecture, et des fonctions que l'on cherche à implémenter. On verra qu'une fonction aussi simple que le consensus ne peut pas être implémentée sur un système à mémoire partagée asynchrone (avec lecture et écriture atomique). Ceci est un résultat relativement récent [FLP82]. La plupart des autres résultats datent des années 90 pour les plus vieux.

11.1 Tâches de décision

Chaque problème que nous allons nous poser sera exprimé sous la forme suivante. Pour chaque processeur $P_0, \ldots, P_{n-1}$, on va se donner un ensemble de valeurs initiales possibles, pour le ou les registres locaux à ces processeurs, dans un domaine de valeurs $\mathcal{K} = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$ etc. Ceci formera un sous-ensemble $\mathcal{I}$ de $\mathcal{K}^n$. De façon similaire, on se donne un ensemble de valeurs finales possibles $\mathcal{J}$ dans $\mathcal{K}^n$.

Enfin, on se donne une fonction, la *fonction de décision* $\delta : \mathcal{I} \to \wp(\mathcal{J})$ associant à chaque valeur initiale possible, l'ensemble des valeurs finales acceptables.

Prenons l'exemple classique du consensus (voir figure 11.1 et 11.2). Chaque processeur démarre avec une valeur locale, ici un entier. Ceux-ci doivent ensuite communiquer afin de se mettre tous d'accord sur une valeur. Cela veut dire que chacun doit terminer son exécution, en temps fini, soit en ayant planté, soit en ayant une valeur locale qui est une de celles qu'avait un des processeurs au début de l'exécution, et tous les autres processeurs "vivants" doivent avoir la même valeur locale. Aux figures 11.1 et 11.2 on a trois processus, l'un avec la valeur 5, l'autre avec 7 et enfin le troisième avec 11. Tous se mettent d'accord sur la valeur 7. Le consensus est un problème essentiel dans les systèmes distribués tolérants aux pannes. Imaginez en effet que l'on ait plusieurs unités de calcul qui doivent contrôler le même appareillage critique, du fait que l'on ne peut pas se permettre qu'une panne vienne arrêter son bon fonctionnement. Il faut néanmoins assurer une certaine cohérence des décisions faites par ces unités redondantes, et ceci peut être fait, par exemple, en faisant en sorte que tous les processus encore vivants se mettent d'accord sur une valeur de commande, que l'un au moins d'entre eux avait calculé. Bien sûr ceci est une abstraction d'un problème en général bien plus complexe, mais la formulation du problème du consensus permet de bien comprendre la difficulté de contrôle d'un système distribué, en présence de pannes.

Le problème du consensus se traduit formellement de la façon suivante :

- $\mathcal{K} = \mathbb{N}$, $\mathcal{I} = \mathbb{N}^n$,
- $\mathcal{J} = \{(x, x, \ldots, x) \mid x \in \mathbb{N}\}$,

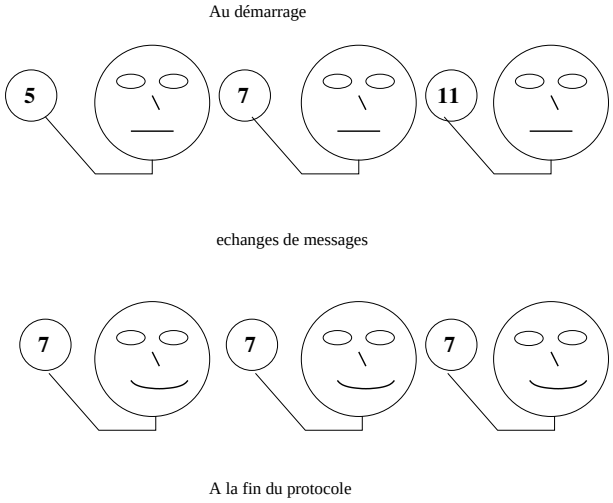


FIG. 11.1 – Le problème du consensus (sans panne).

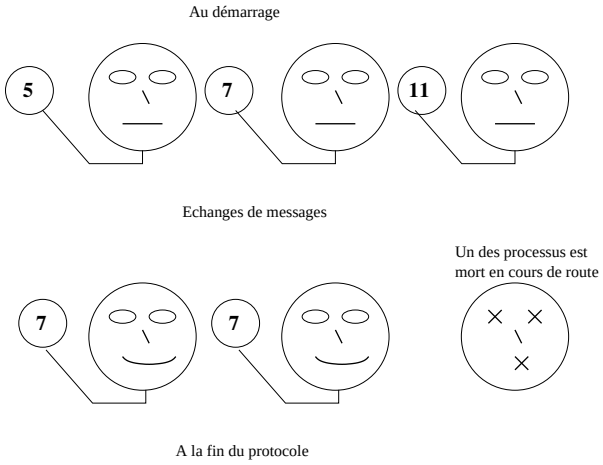


FIG. 11.2 – Le problème du consensus (avec panne).

FIG. 11.3 – Un état local.

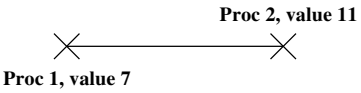


FIG. 11.4 – Un état composé de deux états locaux.

– $\delta(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = \left\{ \begin{array}{c} \{(x_0, x_0, \ldots, x_0), \\ (x_1, x_1, \ldots, x_1), \\ \ldots, \\ (x_{n-1}, x_{n-1}, \ldots, x_{n-1})\} \end{array} \right.$

11.2 "Géométrisation" du problème

On va voir que l'on peut donner aux ensembles de valeurs d'entrée et de sortie une structure géométrique, généralisant celle de graphe, qui s'appelle un ensemble simplicial. Selon le type d'architecture, toutes les fonctions ne pourront pas être programmées, à cause de contraintes géométriques sur les fonctions de décision. Ceci est en fait très similaire à des résultats classiques de géométrie, comme le théorème du point fixe de Brouwer.

11.2.1 Espaces simpliciaux d'états

On va représenter les états des processeurs, à un instant donné de l'exécution de leur protocole d'échange de données, de la façon suivante. On associera un point dans un espace euclidien de dimension suffisante, à toute valeur locale que l'on trouvera sur un processeur donné. Par exemple, l'unique point de la figure 11.3 représente l'état du processeur P_1, dans lequel l'entier local vaut 7.

L'état commun à deux processeurs, à un instant donné, sera représenté par l'arc reliant les états locaux de chacun des deux processeurs, comme cela est montré par exemple à la figure 11.4. Un ensemble d'états de deux processeurs sera représenté comme à la figure 11.5 : on a ici quatre états de la paire de processeurs P_0, P_1, un dans lequel on a la valeur 0 sur P_0 et 0 sur P_1, un autre où P_0 a la valeur 0 et P_1 a la valeur 1, un troisième où P_0 a la valeur 1 et P_1 la valeur 0, et enfin un dernier où P_0 a la valeur 1 et P_1 la valeur 1. Ce sont en fait les quatre états initiaux possibles quand on a deux processeurs qui doivent résoudre le "consensus binaire", c'est-à-dire le consensus dans le cas où les valeurs locales sont constituées d'un seul bit. On remarquera que ce faisant, on a représenté les états initiaux par un graphe. C'est le cas encore à la figure 11.6, qui décrit les deux états finaux possibles du consensus binaire, ou à la figure 11.7 qui décrit les trois états finaux possibles du "pseudo-consensus" binaire. Dans le cas du pseudo-consensus, on s'autorise un seul des deux états possibles ou les deux processeurs n'ont pas la même valeur finale, mais pas l'autre.

La généralisation de cette représentation des états des processeurs, sous forme de graphe, est très simple. L'état global de trois processus sera représenté par l'enveloppe convexe des trois points qui sont les états locaux de chacun des trois processus, comme à la figure 11.8. Pour n processus en général, l'état global sera représenté par l'enveloppe convexe de n points distincts, ce que l'on appelle un n-simplexe : pour $n = 3$ c'est un triangle, pour $n = 4$ c'est un tétraèdre etc.

De même que dans le cas $n = 2$, certaines faces d'un n-simplexe, qui sont des m-simplexes, c'est-à-dire qui représentent les états locaux d'un sous-groupe de m processeurs, peuvent être communes à plusieurs n-simplexes, voir par exemple l'ensemble d'états représenté géométriquement à la figure 11.9. Ces collages de n-simplexes le long de leurs faces sont ce que l'on appelle en

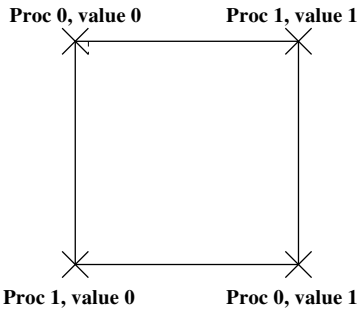


FIG. 11.5 – Etats initiaux pour le consensus binaire à deux processus.

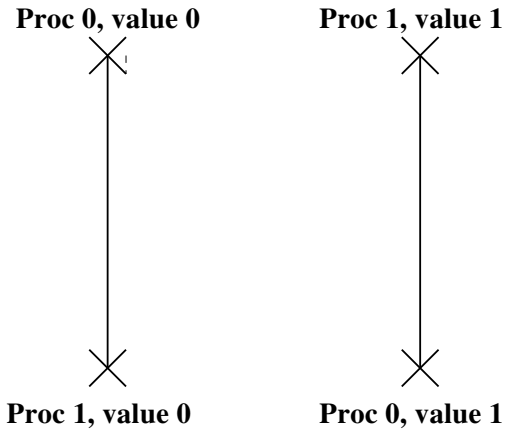


FIG. 11.6 – Etats finaux pour le consensus binaire à deux processus.

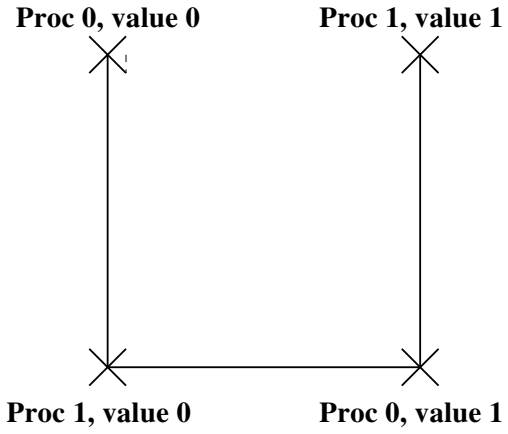


FIG. 11.7 – Etats finaux pour le pseudo-consensus binaire.

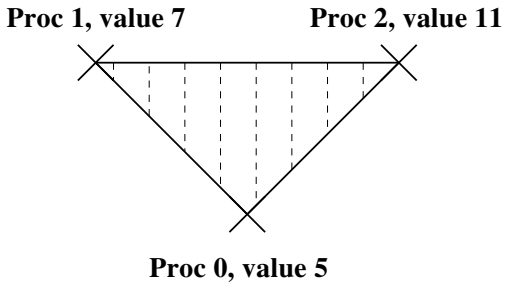


FIG. 11.8 – Etat global de trois processus.

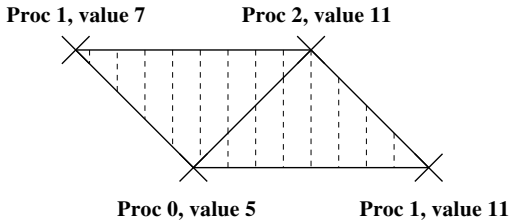


FIG. 11.9 – Ensemble d'états globaux.

général un ensemble simplicial. Il y a une très riche théorie des ensembles simpliciaux, aussi bien combinatoire que topologique. En effet, on peut toujours associer un ensemble simplicial à tout espace topologique, et à "déformation" près (homotopie), la théorie des ensembles simpliciaux est équivalente à celle des espaces topologiques. On utilisera plus loin des intuitions topologiques quand on aura à décrire certains ensembles simpliciaux.

Avec cette représentation des états, la spécification d'une tâche de décision devient une relation "graphique" comme à la figure 11.10, dans le cas du consensus binaire. Les états globaux en relations sont indiqués par les flèches en pointillé. Ainsi, le "segment" $((P,0),(Q,1))$ peut être mis en relation par δ avec $((P,0),(Q,0))$ où $((P,1),(Q,1))$.

11.2.2 Protocoles

Un protocole est un programme fini, commençant avec des valeurs d'entrée, faisant un nombre fixé d'étapes, et s'arrêtant sur une valeur de décision.

Le protocole à information totale est celui où la valeur locale est l'historique complet des

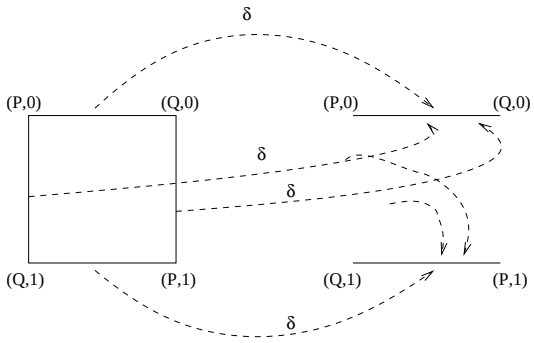


FIG. 11.10 – Spécification du consensus.

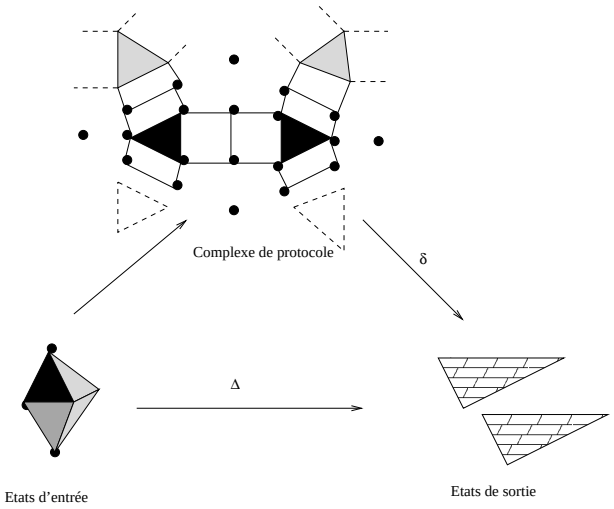


FIG. 11.11 – Stratégie de preuve.

communications. Le protocole "générique" est, en pseudo-code :

```
s = empty;
for (i=0; i<r; i++) {
  broadcast messages;
  s = s + messages received;
}
return delta(s);
```

A chaque tour de boucle correspond un ensemble d'états accessibles, représentés géométriquement, comme aux figures 11.12, 11.13, 11.14. Ceci dépend essentiellement du modèle de communication que l'on a, et sera développé dans deux cas aux sections 11.3 et 11.4.

11.2.3 Stratégie de preuve

Grâce à ces représentations géométriques, on va pouvoir déterminer si une tâche de décision peut être implémentée ou pas sur une architecture, et si oui, combien d'échanges de messages, ou d'écritures et lectures sont nécessaires pour résoudre le problème. Toutes ces questions vont être résolues un peu de la même manière.

Il faut d'abord remarquer que la fonction `delta` dans le protocole générique, est, mathématiquement parlant, une fonction $\delta : P \to O$ allant du protocole à information totale au complexe de sortie. Cette fonction est en fait une fonction simpliciale (car elle est définie sur les points, puis étendue sur les enveloppes convexes), c'est-à-dire que "topologiquement" (entre les réalisations géométriques, c'est-à-dire les représentations graphiques que l'on en fait dans un espace R^n), ce sont les analogues de fonctions continues. Elle doit également respecter la relation de spécification du problème Δ, c'est-à-dire que pour tout $x \in I$, pour tout $y \in P(I)$, $x\Delta(\delta(y))$.

On va essayer de trouver une *obstruction topologique* à l'existence d'une telle fonction simpliciale (pour une étape k donnée). Cela est résumé à la figure 11.11.

Sans vouloir définir de façon générale ce que l'on entend par obstruction topologique, il nous faut quand même expliciter les cas d'intérêt pour la suite de la formalisation. Quand on dit ici obstruction topologique, cela veut dire obstruction à l'existence d'une fonction continue f d'un espace topologique (typiquement ici ce sera la réalisation géométrique d'un espace simplicial d'états) X vers un espace topologique Y vérifiant certaines conditions. Par exemple, si on impose $f(x_0) = y_0$ et $f(x_1) = y_1$ avec x_0 et x_1 dans la même composante connexe et y_0 et y_1 qui ne sont

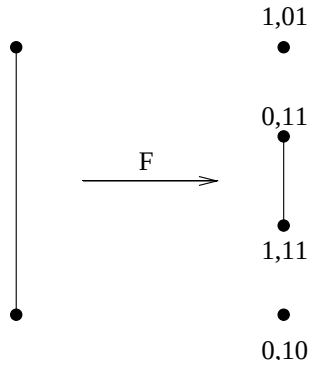


FIG. 11.12 – Complexe de protocole dans le cas synchrone (2 processus).

pas dans la même composante connexe, alors un tel f continu ne peut pas exister (car l'image d'une composante connexe par une fonction continue est une composante connexe). De même, si f va de la n-sphère pleine (le n-disque) vers la n-sphère vide, de telle façon que f est l'identité sur la n-sphère vide, alors f ne peut pas être continue. Cela est lié à la notion de n-connexité, qui est une généralisation de la connexité. Déjà, la 1-connexité (ou simple connexité) est un invariant plus subtil que la connexité (ou 0-connexité), par exemple le cercle est connexe mais pas 1-connexe. Dit de façon brève, la n-sphère vide est $(n-1)$-connexe (la 0-connexité correspond à la connexité habituelle) et pas n-connexe, alors que la n-sphère pleine est n-connexe.

11.3 Cas du modèle synchrone à passage de messages

Prenons l'exemple d'une architecture dans laquelle les informations transitent par passage de message synchrone. A chaque étape, chaque processeur diffuse sa propre valeur aux autres, dans n'importe quel ordre. Chaque processeur reçoit les valeurs diffusées et calcule une nouvelle valeur locale.

On va également supposer que l'on ne se préoccupe que des pannes "crash" des processeurs, et non pas de pannes "byzantines". Une panne crash implique qu'un processeur n'envoie ni ne calcule plus rien, de façon brusque. Par contre, lors d'une panne byzantine (que nous n'étudierons pas ici), un processeur en panne continue à envoyer des données, mais qui n'ont éventuellement aucun sens. Ces plantages peuvent arriver à n'importe quel moment, même en cours du `broadcast`.

A chaque protocole, on va associer un ensemble simplicial, de la même façon qu'on l'a fait pour les entrées et les sorties, qui sera la représentation des états accessibles depuis les états initiaux, à une étape donnée. C'est ce que l'on appelle le complexe de protocole. De fait, cet ensemble simplicial est constitué de :

– points : suites de messages reçus à une étape r
– simplexes : états composés à l'étape r

En fait, il s'agit d'un opérateur, prenant un état d'un certain nombre de processeurs, et renvoyant les états accessibles après une étape. Il suffit ensuite d'itérer cet opérateur afin de trouver les états accessibles après un nombre d'étapes quelconque.

Dans le modèle synchrone, à l'étape 1 (voir la figure 11.12), soit aucun processus n'est mort, donc tout le monde a reçu le message des autres (d'où le segment central), soit un processus est mort, d'où les deux points comme états possibles.

On va faire ici une application simple de cette stratégie de preuve. On considère le problème du consensus binaire entre trois processus, dans le modèle synchrone (et passage de messages) Le complexe d'entrée est composé de 8 triangles : $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,0)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$ et $(1,1,1)$. Il est en fait homéomorphe à une sphère (une seule composante connexe) : les quatre premiers triangles déterminent l'hémisphère "nord" alors que les quatre

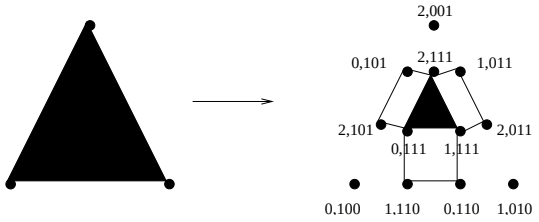


FIG. 11.13 – Complexe de protocole dans le cas synchrone (3 processus).

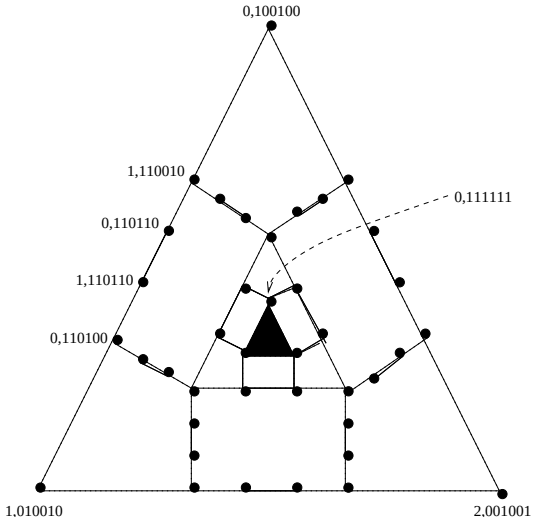


FIG. 11.14 – Complexe de protocole dans le cas synchrone, deuxième étape (3 processus).

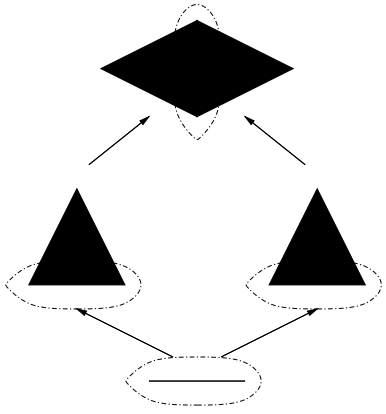


FIG. 11.15 – Collage de deux simplexes.

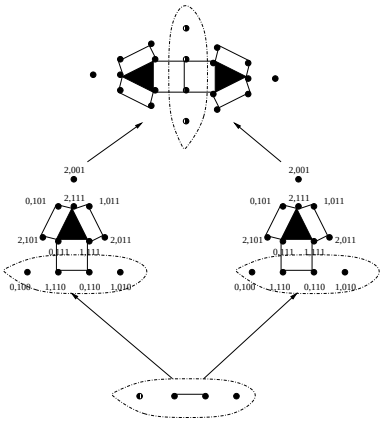


FIG. 11.16 – Construction du complexe de protocole par collage.

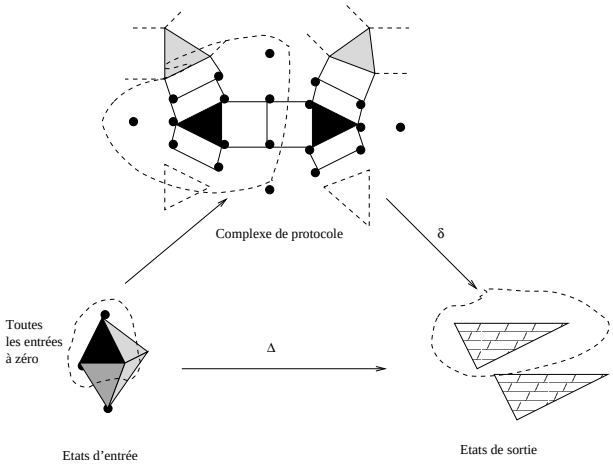


FIG. 11.17 – Application de la stratégie de preuve.

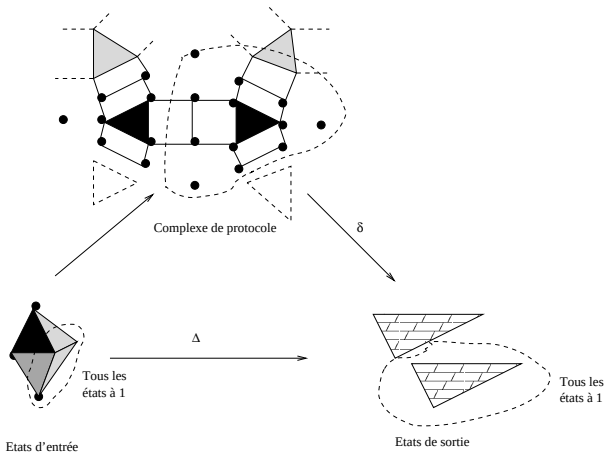


FIG. 11.18 – Application de la stratégie de preuve.

derniers déterminent l'hémisphère "sud". Le complexe de sortie est composé de deux triangles : $(0,0,0)$ et $(1,1,1)$ (donc, deux composantes connexes).

Considérons une seule étape de communication, comme à la figure 11.17. Le simplexe $(0,0,0)$ de l'hémisphère nord du complexe d'entrée se mappe sur la région du complexe de protocole entourée de pointillés, à la figure 11.17. Alors que le simplexe $(1,1,1)$ se mappe sur la région du complexe de protocole entourée de pointillés, à la figure 11.18. Comme ces deux simplexes sont connexes dans le complexe d'entrée, il est facile de démontrer que, après une étape, leurs images dans le complexe de protocole sont aussi connexes. Or la fonction de décision δ doit envoyer la première région sur le simplexe $(0,0,0)$ du complexe de sortie, et la deuxième région sur le simplexe $(1,1,1)$ du complexe de sortie. Comme on le voit à la figure 11.19, ceci est impossible car δ doit être simpliciale (c'est à dire continue en un certain sens), donc doit préserver la connexité, et ces deux simplexes ne sont pas connexes dans le complexe de sortie! Cela prouve l'impossibilité dans ce modèle de résoudre le consensus en une étape.

On considère au plus $n-2$ plantages, comme à la figure 11.19.

On peut prouver de façon plus générale que, dans tout complexe de protocole à jusqu'à l'étape $n-2$, le sous-complexe où les processus ont tous 0 comme valeur locale, et le sous-complexe où les processus ont tous 1 comme valeur locale, sont connexes. Par le même raisonnement, il s'en suit

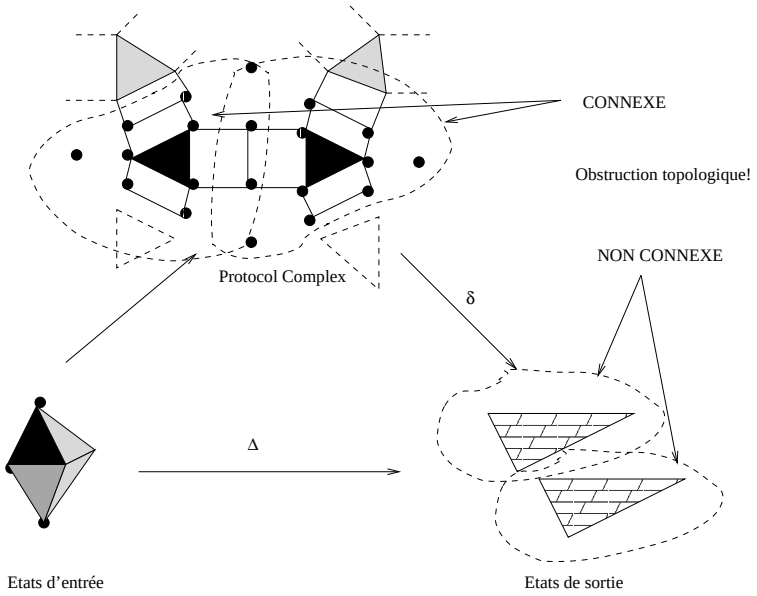


FIG. 11.19 – Application de la stratégie de preuve.

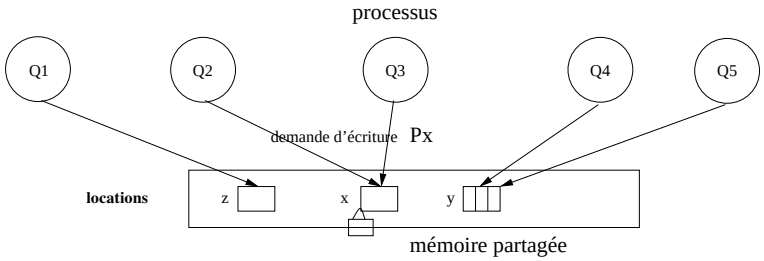


FIG. 11.20 – Une machine distribuée asynchrone à mémoire partagée

aisément qu'on ne peut pas résoudre le problème du consensus en moins de $n-2$ étapes.

De façon encore plus générale, dans le modèle par passage de message synchrone où on s'autorise au plus k pannes, au bout de r étapes, on a $P(S^{n-1})$ qui est $(n-rk-2)$-connexe. Cela implique la borne de $n-1$ pour résoudre le consensus (pour $k=1$).

11.4 Cas du modèle asynchrone à mémoire partagée

On suppose que l'on dispose d'une machine comme à la figure 11.20, dans laquelle n processus partagent une mémoire de taille infinie, partitionnée de la manière suivante. Chaque processus peut écrire de façon atomique sur sa partie (`update`) et lire de façon atomique toute la mémoire partagée dans sa propre mémoire locale. C'est un modèle équivalent, en ce qui nous concerne, au modèle plus classique de lecture/écriture atomique en mémoire partagée (sans partitionnement). On cherche maintenant des protocoles *sans attente*, c'est-à-dire robustes jusqu'à $n-1$ pannes.

On a le théorème suivant, que l'on ne prouvera pas, et qui est du à Maurice Herlihy et Sergio Rajsbaum (voir par exemple [HR00]) :

Théorème Les complexes de protocoles sans-attente, pour le modèle mémoire partagée asynchrone avec lecture/écriture atomique sont $(n-1)$-connexes (aucun trou en toutes dimensions)

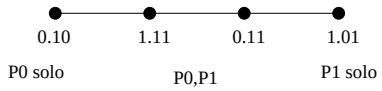


FIG. 11.21 – Le complexe de protocole dans le cas asynchrone (deux processus).

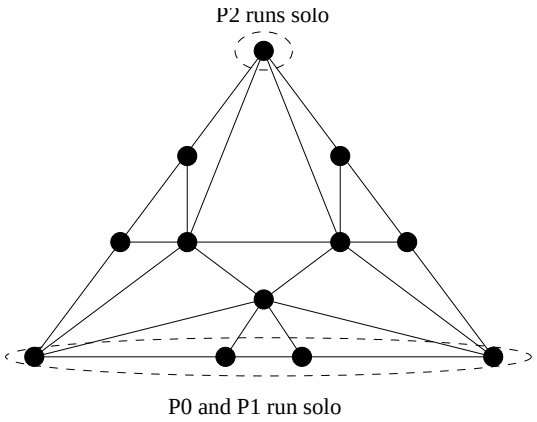


FIG. 11.22 – Le complexe de protocole dans le cas asynchrone (trois processus).

quel que soit le nombre d'étapes considérées.

On va faire une application de ce théorème au problème du k-consensus. Il s'agit en fait d'une généralisation du problème du consensus : les processus encore vivants doivent terminer leur exécution avec au plus k valeurs différentes, prises dans l'ensemble des valeurs initiales.

Le complexe de sortie, illustré à la figure 11.23 est composé de 3 sphères collées ensemble, moins le simplexe formé des 3 valeurs distinctes. Il n'est pas simplement connexe.

On va utiliser un outil classique de la topologie algébrique combinatoire. Commençons par subdiviser un simplexe. On donne ensuite une couleur distincte à chaque coin du simplexe. Pour les autres points du bords du simplexe, on donne la couleur d'un des coins. On colorie les points intérieurs par n'importe quelle couleur. Ceci est illustré à la figure 11.24.

Alors, comme illustré à la figure 11.25, il y a au moins un simplexe qui possède toutes les couleurs (lemme de Sperner).

On va colorier chaque point des complexes d'entrée et de protocole de la façon suivante : chaque processus est colorié avec la couleur correspondant à son entrée. Chaque point du complexe de

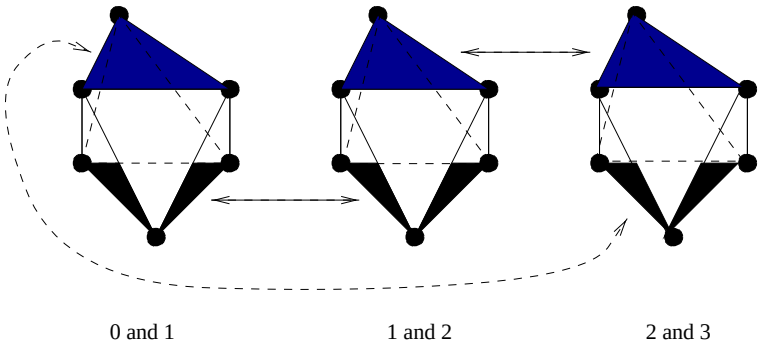


FIG. 11.23 – Complexe de sortie, pour $n = 3$ et $k = 2$.

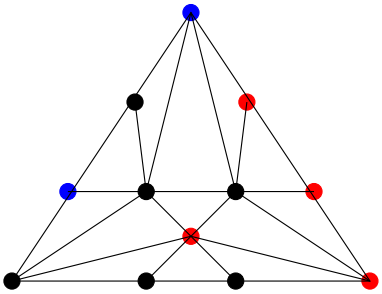


FIG. 11.24 –

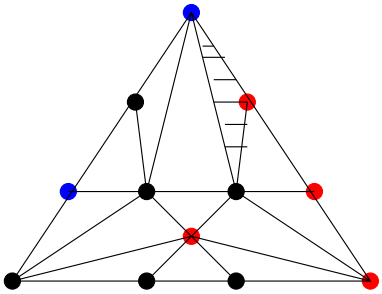


FIG. 11.25 –

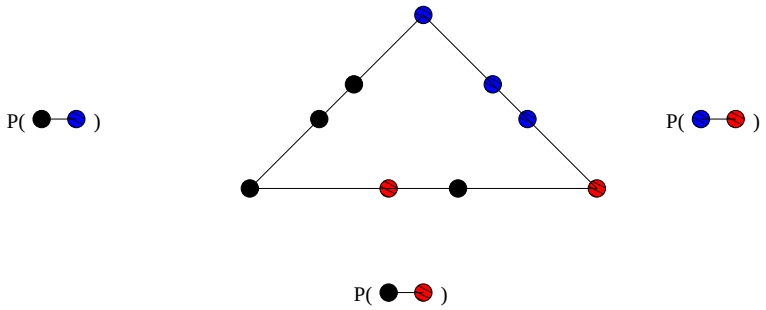


FIG. 11.26 – Coloriage du complexe de protocole en dimension 2.

protocole est colorié par sa décision.

Pour ce qui est du complexe de protocole, regardons comment se fait le coloriage en petite dimension. Quand on considère l'exécution d'un seul processeur, la couleur est imposée : en effet, le processus ne peut choisir que la couleur qu'il avait au départ. Quand on considère l'exécution de deux processeurs, comme à la figure 11.26, le complexe de protocole correspondant est connexe, et tous les points doivent être d'une des deux couleurs de départ.

De façon générale, comme le complexe de protocole est simplement connexe, on peut "remplir" l'intérieur des chemins combinatoires. Les coins du complexe de protocole sont coloriés avec la valeur initiale sur ces processeurs (voir remarque en dimension 1). Il nous reste seulement à appliquer le lemme de Sperner. On en déduit qu'il existe un simplexe qui a toutes les 3 couleurs. Ce simplexe correspondrait à une exécution du protocole dans laquelle les trois processeurs décideraient trois valeurs différentes, ce qui contredit l'hypothèse du 2-consensus !

En fait, on a un résultat très général concernant le modèle asynchrone :

Théorème Une tâche de décision peut être calculée dans le modèle asynchrone si et seulement si il existe une fonction simpliciale μ allant d'une subdivision du complexe d'entrée vers le complexe de sorte, et qui respecte la spécification Δ.

Le principe de la preuve est le suivant.

Commençons par l'implication vers la droite. On peut démontrer (en utilisant la suite exacte de Mayer-Vietoris), que le complexe de protocole est, à chaque étape, $(n-1)$-connexe. Cela permet de plonger (par une fonction simpliciale) n'importe quelle subdivision du complexe d'entrée dans le complexe de protocole, pour une étape assez grande. Enfin, on sait que si une tâche de décision peut être résolue, alors on a une fonction simpliciale du complexe de protocole vers le complexe de sortie.

Dans l'autre sens, on peut prouver que l'on peut réduire n'importe quelle tâche de décision au problème de l'accord (ou consensus) sur un simplexe. Ceci se fait en utilisant l'algorithme du "participating set" de [BG93]. Cette tâche de décision commence par les coins d'un simplexe

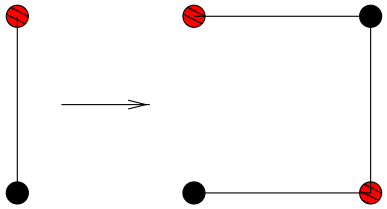


FIG. 11.27 – Subdivision d'un segment en trois segments.

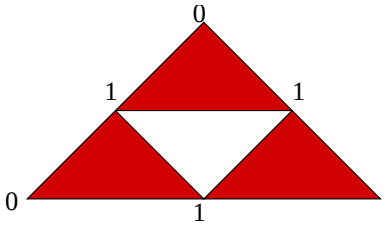


FIG. 11.28 – Complexe de protocole pour `test&set`, dans le cas de trois processus.

subdivisé, et doit terminer sur les points d'un seul simplexe de la subdivision.

Montrons comment cela se passe avec deux processus. Le programme suivant :

$$
\begin{array}{lcl}
P & = & update; \\
 & & scan; \\
 & & case\ (u,v)\ of \\
 & & \quad (x,y') :\ u = x'; update; [] \\
 & & \quad default :\ update
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
P' & = & update; \\
 & & scan; \\
 & & case\ (u,v)\ of \\
 & & \quad (x,y') :\ v = y; update; [] \\
 & & \quad default :\ update
\end{array}
$$

opère la transformation géométrique illustrée à la figure 11.27, c'est-à-dire qu'elle subdivise un segment en trois segments. En fait, c'est exactement le code qui implémente le pseudo-consensus binaire entre deux processeurs.

Cela est facile à voir, en utilisant la sémantique des opérations de lecture/écriture atomiques. En fait, on n'a que trois traces intéressantes possibles, correspondant aux trois segments :

(i) Supposons que l'opération *scan* de P se termine avant que l'opération *update* de P' n'ai commencée : P ne connait pas y et il choisit donc d'écrire x dans sa partition de la mémoire. *Prog* termine avec l'état global $((P,x),(P',y))$.

(ii) Cas symétrique : *Prog* termine avec l'état global $((P,x'),(P',y'))$.

(iii) L'opération *scan* de P s'exécute après l'opération *update* de P' et l'opération *scan* de P' s'exécute après l'opération *update* de P. *Prog* termine avec l'état global $((P,x'),(P',y))$.

11.5 Autres primitives de communication

Les modèles vus précédemment sont un peu idéalisés. Les systèmes multi-processeurs modernes offrent bien d'autres mécanismes de synchronisation : `test&set`, `fetch&add`, `compare&swap`, files d'attentes etc.

A chacun de ces mécanismes nouveaux, correspond d'autres résultats (et bien sûr d'autres complexes de protocoles). Par exemple, on peut résoudre le problème du consensus entre deux processus, avec `test&set`, ou encore avec une file d'attente (avec `push` et `pop` atomiques), voir [Lyn96].

Dans le cas de `test&set` par exemple, les complexes de protocoles sont tous $(n-3)$-connexes. On en déduit bien évidemment que le consensus entre deux processus est implémentable, et donc

que c'est une primitive "plus puissante" que la lecture/écriture atomique. Mais on en déduit aussi assez facilement que le consensus entre trois processus n'est pas implémentable.

11.6 Quelques références

Ce domaine démarre vraiment en 1985 avec la preuve de Fisher, Lynch et Patterson ("FLP"), qu'il existe des tâches de décision simples qui ne peuvent pas être implémentées sur un système simple de passage de messages, quand on veut qu'elles soient robustes à une panne crash.

Plus tard, ce sont Biran, Moran et Zaks à PoDC'88 qui trouveront la caractérisation des tâches de décision qui peuvent être implémentées sur un système simple de passage de messages, en s'autorisant jusqu'à une panne crash. L'argument utilise une notion de "similarity chain" que l'on pourrait concevoir comme étant une version unidimensionnelle des arguments que nous avons développés précédemment. Puis à PoDC'1993, et de façon indépendante, Borowsky et Gafni, Saks et Zaharoglou et enfin Herlihy et Shavit ont trouvé des bornes inférieures pour le problème du k-consensus (d'abord proposé par Chaudhuri en 1990). Cette borne est en général de $\lfloor \frac{f}{k} \rfloor + 1$ étapes dans le modèle synchrone. Nous avons essentiellement suivi ici les méthodes de preuve de Herlihy et Shavit.

Après cela, Attiya, BarNoy, Dolev et Peleg ont pu caractériser la tâche de renommage, dans JACM 1990. Cette tâche, ou plus généralement la tâche de $(n+1, K)$-renommage commence avec $n+1$ processus qui ont chacun un nom unique dans $0, \ldots, N$. On leur demande de se communiquer des informations afin de changer leur nom, en un nom unique dans $0, \ldots, K$ avec $n \leq K < N$. Ils ont montré que dans le modèle passage par messages, il y a une solution sans attente pour $K \geq 2n + 1$, et aucune pour $K \leq 2n$.

Herlihy et Shavit dans STOC'93 ont prouvé que ce résultat est encore valide dans le modèle asynchrone (ce qui leur a valu le prix Gödel en 2004).

La caractérisation complète des tâches de décision calculables sans attente dans le modèle asynchrone se trouve dans "The topological structure of asynchronous computability", M. Herlihy and N. Shavit, J. of the ACM, 2000. On reporte le lecteur au livre très complet de Lynch, "Distributed Algorithms" (1996) pour plus de détails. Disons enfin que la représentation géométrique utilisée dans ce chapitre et celle des "progress graphs" brièvement développée à la section 5.4.2 est liée, voir par exemple [Gou03].

Bibliographie

[Abi00] S. Abiteboul. Bases de données, cours de l'Ecole Polytechnique, 2000.

[BG93] E. Borowsky and E. Gafni. Generalized FLP impossibility result for t-resilient asynchronous computations. In *Proc. of the 25th STOC*. ACM Press, 1993.

[CC77] P. Cousot and R. Cousot. Abstract interpretation : A unified lattice model for static analysis of programs by construction of approximations of fixed points. *Principles of Programming Languages 4*, pages 238–252, 1977.

[Cou90] P. Cousot. *Methods and Logics for Proving Programs*. Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland), 1990.

[Dij68] E.W. Dijkstra. *Cooperating Sequential Processes*. Academic Press, 1968.

[FLP82] M. J. Fischer, N. A. Lynch, and M. S. Paterson. Impossibility of distributed consensus with one faulty process. Technical Report MIT/LCS/TR-282, Massachusetts Institute of Technology, September 1982.

[GNS00] E. Goubault, F. Nataf, and M. Schoenauer. Calcul parallèle, 2000.

[Gou03] E. Goubault. Some geometric perspectives in concurrency theory. *Homology Homotopy and Applications*, 2003.

[Gun94] J. Gunawardena. Homotopy and concurrency. In *Bulletin of the EATCS*, number 54, pages 184–193, October 1994.

[Hoa74] C.A.R. Hoare. Monitors : an operating system structuring concept. *Communication of the ACM*, 17, 1974.

[HR00] M. Herlihy and S. Rajsbaum. A primer on algebraic topology and distributed computing. In *Lecture Notes in Computer Science*, number 1000. Springer-Verlag, 2000.

[Lyn96] N. Lynch. *Distributed Algorithms*. Morgan-Kaufmann, 1996.

[OG75] Susan S. Owicki and David Gries. Proving properties of parallel programs : An axiomatic approach. Technical Report TR75-243, Cornell University, Computer Science Department, May 1975.

[OW00] S. Oaks and H. Wong. *Java Threads*. O'Reilly, 2000.

[Ray97] M. Raynal. *Algorithmique et Parallélisme, le problème de l'exclusion mutuelle*. Dunod, 1997.

[Rem00] D. Remy. Compilation, cours de l'Ecole Polytechnique, 2000.

[RL03] Y. Robert and A. Legrand. *Algorithmique Parallèle, Cours et problèmes résolus*. Dunod, 2003.

[Rob00] Y. Robert. Algorithmique parallèle. Technical report, Cours, Ecole Polytechnique, 2000.

[RR] D. Reilly and M. Reilly. *JAVA, Network Programming and Distributed Computing*. Addison-Wesley.

[Win93] G. Winskel. *The formal semantics of programming languages*. The MIT Press, 1993.